P-Konvexität und ω-Hypoelliptizität für partielle Differentialoperatoren mit konstanten Koeffizienten

Diplomarbeit
von
Claus Fieker

angefertigt am
Mathematischen Institut
der
Heinrich-Heine-Universität
Düsseldorf

1993

Zusammenfassung

Nachdem 1960 Hörmanders Buch *Linear Partial Differential Operators* ([**H1**]) erschienen ist, hat Björck (in [**Bj**]) mit Ideen von Beurling [**Be**] diese Theorie auf eine größere Klasse von Distributionen verallgemeinert, indem er weniger Testfunktionen zuließ. Für eine offene Menge $\Omega \subseteq \mathrm{I\!R}^N$ betrachtete er als Grundraum von Testfunktionen den Raum

$$\mathcal{D}_{(\omega)}(\Omega) := \{f \in C(\mathrm{I\!R}^N) \mid \operatorname{supp} f \subset \Omega \text{ und } \forall \lambda > 0 : \hat{f} e^{\lambda\omega} \in \mathrm{L}_1(\mathrm{I\!R}^N)\},$$

der von einer stetigen, subadditiven Gewichtsfunktion ω abhängt. Für $\omega(t) = \log(1 + |t|)$ erhält er so den Raum $C_c^\infty(\Omega)$ und für $\omega(t) := t^\alpha$ $(1 < \alpha < 1)$ die Gevery-Klasse $\Gamma^{(1/\alpha)}$ als Spezialfall. Beurling konnte in [**Be**] (siehe auch Franken [**F**]) zeigen, daß diese Räume genau dann nicht trivial sind, wenn $\omega/(1 + |t|^{N+1})$ integrierbar ist.

Eine andere Möglichkeit solche Testfunktionsräume zu definieren, nämlich über das Wachstum der Ableitungsfamilien, tritt bei der Untersuchung der Güte von (Distributions-)Lösungen von Differentialgleichungen in natürlicher Weise auf (für diesen Zugang siehe z.B. Ciorănescu-Zsidó [**CZ**] und Komatsu [**Ko**]), da z.B. die Nullösungen eines hypoelliptischen Differentialoperators in einer nur von dem Operator (dem zugrunde liegendem Polynom) abhängenden Gevery-Klasse liegen.

In neuerer Zeit ist in einer Arbeit von Braun, Meise und Taylor ([**BMT**]) die Klasse von Gewichtsfunktionen ω vergrößert worden (statt Subadditivität wird nur noch $\omega(2x) \leq K(1 + \omega(x))$ gefordert). Gleichzeitig wird dort eine äquivalente Charakterisierung über das Wachstum der Ableitungsfamilie mittels der *Young-Konjugieren* von $\omega(e^t)$ zur Verfügung gestellt ([**BMT**] 3.4.(2) b.z.w. Lemma I.3.4).

Aufbauend auf diesem Artikel wird hier der Hörmandersche (Björcksche) Ansatz zur Untersuchung von linearen, partiellen Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten auf diese neue, größere Klasse von Distributionen angewendet. Mit diesen Methoden werden die klassischen Ergebnisse über die Lösbarkeit von $P(D)\,u = f$ mit $f \in \mathcal{D}'_{(\omega)}(\Omega)$ ($\mathcal{E}'_{(\omega)}$, $\mathcal{E}_{(\omega)}$, $\mathcal{D}'_{(\omega)F}$) und Aussagen über die Güte von (Null-) Lösungen bewiesen. Es werden für die Lösbarkeit auf diesen Klassen jeweils notwendige und hinreichende Bedingungen an P, Ω und ω bewiesen. Im letzten Kapitel werden dann die Operatoren charakterisiert, deren Nullösungen sehr glatt sind (in $\mathcal{E}_{(\omega)}$ liegen). Dies verallgemeinert dann die Hypoelliptizität. Auch hier werden notwendige und hinreichende Bedingungen an P und Ω angegeben.

Die Hauptschwierigkeit dieser Arbeit bestand darin, Hörmanders Räume $\mathrm{B}_{p,k}$ in diesem Rahmen sinnvoll zu definieren (speziell einen Ersatz für die Definition der „temperierten Gewichtsfunktionen“ zu finden) und dann die für die späteren Untersuchungen benötigten Sätze zu zeigen. Da diese Räume hier i.allg. nicht semi-lokal (keine $\mathcal{D}_{(\omega)}$-Moduln) sind, kann es hier passieren, daß die entsprechenden lokalen Räume ($\mathrm{B}_{p,k}^{\omega,loc} := \{f \in \mathcal{D}'_{(\omega)} \mid f\,\mathcal{D}_{(\omega)} \subseteq \mathrm{B}_{p,k}\}$ keine Erweiterung der betrachteten $\mathrm{B}_{p,k}$ darstellen. Daher steht das wichtige Theorem 2.2.5 [**H1**] (die Multiplikation mit Testfunktionen ist in $\mathrm{B}_{p,k}$ stetig) nicht zur Verfügung, so daß die Distributionen $u \in \mathrm{B}_{p,k}$, die mit Testfunktionen multipliziert werden können, genauer untersucht werden müssen. Da die meisten wichtigen Ergebnisse über diese Räume (zumindest in den wichtigen Spezialfällen) erhalten bleiben, kann dann in den Kapiteln III und IV die Theorie von Hörmander und Björck fast ungeändert übernommen werden.

Die Arbeit besteht aus 4 Kapiteln:

- Im ersten Kapitel werden die betrachteten Räume von Testfunktionen und Distributionen eingeführt und einige wichtige Sätze gezeigt oder zitiert. („Paley-Wiener“ Sätze für $\mathcal{D}_{(\omega)}$, $\mathcal{E}'_{(\omega)}$ und sing_ω supp, Glätten mit $\mathcal{D}_{(\omega)}$ Funktionen, „Theorem of supports“, Fouriertransformation auf $\mathcal{S}_\omega$, $\mathcal{S}'_\omega$ und $\mathcal{E}'_{(\omega)}$)
- Im zweiten Kapitel werden die zur Untersuchung der Lösbarkeit auf $\mathcal{E}'_{(\omega)}$ und $\mathcal{D}'_{(\omega)F}$ benötigen Hilfsräume $\mathrm{B}_{p,k}$ und $\mathrm{B}^{\omega,loc}_{p,k}$ eingeführt und ihr Verhalten unter Faltung und Anwendung von Differentialoperatoren untersucht.
- Im dritten Abschnitt werden Exponentiallösungen eingeführt, um mit ihnen die $f \in \mathcal{E}'_{(\omega)}$ zu charakterisieren, für die es Lösungen in $u \in \mathcal{E}'_{(\omega)}$ gibt. Im Anschluß daran wird die Surjektivität auf $\mathcal{E}_{(\omega)}$, $\mathcal{D}'_{(\omega)F}$ und $\mathcal{D}_{(\omega)}$ charakterisiert.
- Im letzten Kapitel wird ω-Hypoelliptizität eingeführt und untersucht, wie sie mit Elliptizität und Hypoelliptizität zusammenhängt.

Zum Abschluß möchte ich mich bei Herrn Professor Meise herzlich für die Überlassung dieses Themas und die Betreuung während der Arbeit bedanken.

Inhaltsverzeichnis

KAPITEL 1

Grundlagen

Hier werden die für die weiteren Kapitel nötigen Grundlagen dargestellt. Weitgehend analog dem Artikel von Björck ([**Bj**]) bzw. dem älteren Buch von Hörmander ([**H1**]) werden hier die benötigten Räume von Testfunktionen ($\mathcal{D}_{(\omega)}(\Omega)$, $\mathcal{E}_{(\omega)}(\Omega)$, $\mathcal{S}_\omega$) und die zugehörigen Distributionsräume eingeführt. An einigen Stellen werden neuere Ergebnisse von Hörmander ([**H2**]) sowie von Braun-Meise-Taylor ([**BMT**]) benutzt, um schärfere Aussagen zu erhalten oder um die Beweise zu kürzen.

Am Anfang dieses Kapitels werden die Gewichtsfunktionen eingeführt und einige elementare Eigenschaften bewiesen. Später werden dann die Testfunktionen und die zugehörigen Räume von (Ultra-)Distributionen eingeführt und die Sätze von Paley-Wiener und Paley-Wiener-Schwartz hierfür angegeben.

Einige der später benötigten Eigenschaften des Trägers (supp) und des singulären Trägers (sing_ω supp) einer Distribution werden ebenfalls hier bewiesen („Theorem of supports“, „Paley-Wiener“ für den singulären Träger).

1. Schreibweisen

Für zwei Mengen $A, B \subseteq \mathbb{R}^N$ ($A, B \subseteq {}^N$) schreibe hier:

$$A \quad B \iff A \text{ ist eine kompakte Teilmenge von } B$$

$$A \quad B \iff \overline{A} \quad B$$

Für eine Familie $(K_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von Teilmengen einer offenen Menge Ω schreibe:

$$K_n \nearrow\!\!\nearrow \Omega$$

falls:

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} K_n = \Omega$$

und für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$K_n \quad \mathring{K}_{n+1} \quad K_{n+1}$$

Das Ende eines Beweises wird mit einem „ “ gekennzeichnet. Konstanten (C, $\tilde{C}$) können sich von Zeile zu Zeile ändern, ohne daß dies vermerkt wird.

$B_r(x)$ wird als euklidische Kugel (im $\mathbb{R}^N$) mit dem Radius r um x definiert, $B_r := B_r(0)$ und m_N bezeichnet das N-dimensionale Lebesguemaß. Die auftretenden Umgebungen sind stets offen. Alle weiteren Bezeichnungen werden (falls nicht anders vermerkt) wie in den Büchern von Hörmander ([**H1**] und [**H2**]) verwendet.

2. Gewichtsfunktionen

Zunächst werden hier Gewichtsfunktionen eingeführt und die Existenz von hinreichend glatten Gewichtsfunktionen gezeigt.

Definition 2.1. *Sei $\mathcal{M}'$ die Menge aller monoton wachsenden Funktionen $\omega : [0,\infty[\to [0,\infty[$, die die folgenden Bedingungen (α'), (β), (γ) und (δ) erfüllen. $\omega \in \mathcal{M}'$ heißt* Gewichtsfunktion*, eine Gewichtsfunktion heißt* subadditiv*, wenn sie zusätzlich noch (α) erfüllt. Definiere $\mathcal{M}$ als die Menge aller subadditiven Gewichtsfunktionen.*

$$\omega(x+y) \le \omega(x) + \omega(y) \tag{α}$$

$$\exists K > 1 \,:\, \omega(x+y) \le K(1 + \omega(x) + \omega(y)) \tag{α'}$$

$$\int_{\mathbb{R}_{\ge 0}} \frac{\omega(x)}{1+x^2}\, dx < \infty \tag{β}$$

$$\exists a \in \mathbb{R}, b \ge 0 \forall x \in \mathbb{R} \,:\, \omega(x) \ge a + b\log(1+x) \tag{γ}$$

$$t \mapsto \omega(e^t) \text{ ist konvex} \tag{δ}$$

Für $z \in {}^{N}$ setze $\omega(z) := \omega(|z|)$ $(|z|^2 := \sum_{j=1}^{N} |z_j|^2)$.

Bemerkung 2.2. (1) Zu (α') ist äquivalent:

$$\exists K > 1 \,:\, \omega(2x) \le K(1 + \omega(x))$$

(2) Aus (γ) folgt, daß für $\gamma > \frac{2}{a}$:

$$\int_{\mathbb{R}^N} e^{-\gamma\omega}\, dx < \infty \tag{γ'}$$

gilt. Denn:

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^N} e^{-\gamma\omega}\, dx &\le \int_{\mathbb{R}^N} e^{-\gamma(a+b\log(|1+x|))}\, dx \le e^{-\gamma a}\int_{\mathbb{R}^N} e^{-a\gamma\log(1+|x|)}\, dx \\ &= C\int_{S^N}\int_0^\infty r\left(\frac{1}{1+|rw|}\right)^{a\gamma} dr\, dw < \infty.\end{aligned}$$

Wobei S^N die Oberfläche der N-dimensionalen Einheitskugel und dw das zugehörige euklidische Oberflächenmaß ist.

(3) Aus (β) folgt für jedes $C > 0$ die Existenz eines $D > 0$ mit

$$\omega(x) \le C|x| + D.$$

(4) $(\alpha) \Rightarrow (\alpha')$ und $\mathcal{M} \subset \mathcal{M}'$ wie Franken in [**F**] gezeigt hat. Er hat dort Gewichtsfunktionen ω konstruiert, die so stark anwachsen, daß jede größere subadditive Gewichtsfunktion $\tilde{\omega}$ (β) verletzt.

Definition 2.3. *Für zwei Funktionen ω_1, ω_2 schreibe*

$$\omega_2 \prec \omega_1$$

falls $A \in \mathbb{R}$ und $C > 0$ mit $\omega_2 \le A + C\omega_1$ existieren.

Zwei Funktionen ω_1, ω_2 heißen äquivalent*, wenn $\omega_1 \prec \omega_2$ und $\omega_2 \prec \omega_1$ gelten.*

Im wesentlichen wie bei Franken ([**F**]) Lemma 1.23, jedoch mit einer zusätzlichen Abschätzung für die Ableitung, gilt das folgende Lemma:

Lemma 2.4. Zu jedem $\omega \in \mathcal{M}'$ gibt es eine äquivalente Gewichtsfunktion $\tilde{\omega} \in C^\infty$ und ein $C > 0$ mit $\frac{d\tilde{\omega}}{dx} \leq C$.

Beweis. Sei $\psi \in C_c^\infty$ mit $\psi \geq 0$, $\operatorname{supp}\psi \subseteq B_1$ und $\int_{\mathbb{R}^N} \psi\, dx = 1$. Definiere nun

$$\varphi_{\tilde{\omega}}(t) := \varphi_\omega(. - 1) * \psi \quad \text{und} \quad \tilde{\omega} := \varphi_{\tilde{\omega}} \circ \log|_{[0,\infty[}$$

mit $\varphi_\omega(t) := \chi_{[0,\infty[}(\omega(e^t) - \omega(1))$. Offensichtlich ist dann $\varphi_{\tilde{\omega}} \in C^\infty$ monoton steigend mit $\varphi_{\tilde{\omega}}(0) = 0$. Daher ist dann $\tilde{\omega}$ ebenfalls monoton steigend, und es gilt $\tilde{\omega} \equiv 0$ auf $[0, 1]$.

Mit (α') und (γ) folgt, daß es Zahlen T, $\tilde{C} > 1$ gibt so, daß $\varphi_\omega(t + 1) \leq \tilde{C}\varphi_\omega(t)$ für jedes $t > \log T$ gilt. Für $t \geq 1 + \log T$ gilt somit:

$$\varphi_{\tilde{\omega}}(t) = \int_{-1}^{1} \psi(x)\varphi_\omega(t - x - 1)\, dx \leq (\int_{-1}^{1} \psi(x)\, dx)\varphi_\omega(t) = \varphi_\omega(t)$$

sowie

$$\varphi_\omega(t) \leq \tilde{C}\varphi_\omega(t - 1) = \tilde{C} \int_{-1}^{1} \psi(x)\varphi_\omega(t - x - 1 + x)\, dx \leq \tilde{C}^2 \int_{-1}^{1} \psi(x)\varphi_\omega(t - x)\, dx = \tilde{C}^2\varphi_{\tilde{\omega}}(t).$$

Also sind φ_ω und $\varphi_{\tilde{\omega}}$ und daher auch ω und $\tilde{\omega}$ äquivalent. Wegen der Äquivalenz hat $\tilde{\omega}$ dann auch (β) und (γ). Da sich die Konvexität von φ_ω in der Faltung erhält ist auch $\varphi_{\tilde{\omega}}$ konvex. Wegen

$$\begin{aligned} \tilde{\omega}(2x) &= \varphi_{\tilde{\omega}} * \psi(\log(2x)) = \int_{\mathbb{R}} \psi(t)\omega(2e^{1-t+\log x})\, dt \\ &\leq 2K \int_{\mathbb{R}} \psi(t)\omega(e^{1-t+\log x})\, dt + K = 2K\tilde{\omega}(x) + K \end{aligned}$$

für $x > 1$, folgt mit 2.2.(1), daß $\tilde{\omega}$ auch (α') erfüllt.

Es bleibt die Abschätzung für die Ableitung zu zeigen:

$$\begin{aligned} \frac{d\tilde{\omega}}{dx} &= \frac{d}{dx} \int_{\mathbb{R}} \varphi_\omega(t - 1)\psi(\log(x) - t)\, dt \\ &= \int_{\mathbb{R}} \varphi_\omega(t - 1)\frac{d\psi(\log(x) - t)}{dx}\, dt \\ &= \int_{\mathbb{R}} \varphi_\omega(t - 1)\frac{1}{x}\psi'(\log(x) - t)\, dt \\ &= \frac{1}{x} \int_{\mathbb{R}} \varphi_\omega(\log(x) - t - 1)\psi'(t)\, dt \\ &= \frac{1}{x} \int_{-1}^{1} \omega(xe^{-1-t})\psi'(t)\, dt \end{aligned}$$

Da ω monoton wächst, kann man weiter abschätzen und erhält:

$$\leq C\frac{1}{x}\omega(x).$$

Nach (β) gibt es $E > 0$ mit $\omega(x) \leq x + E$. Da $\tilde{\omega} \equiv 0$ auf $[0, 1]$ ist folgt die Behauptung.

3. $\mathcal{D}_{(\omega)}(\Omega)$, $\mathcal{E}_{(\omega)}(\Omega)$

Hier werden im wesentlichen die Räume von Testfunktionen ($\mathcal{D}_{(\omega)}$, $\mathcal{E}_{(\omega)}$) eingeführt und der Satz von Paley-Wiener angegeben.

Definition 3.1. (1) *Sei $f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ eine meßbare Funktion. Für $1 \leq p < \infty$ setze*

$$\|f\|_{L_p} := \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f|^p \, dx\right)^{1/p}$$

und für $p = \infty$

$$\|f\|_{L_\infty} := \inf_{N \text{Nullmenge}} \sup_{x \in \mathbb{R}^n \setminus N} |f|(x).$$

(2) *Für jede positive, meßbare Funktion k definiere*

$$L_{p,k} := \{f \in L_1^{loc} \mid \|fk\|_{L_p} < \infty\}.$$

Zusätzlich setze noch:

$$L_1^c = \{f \in L_1 \mid \operatorname{supp} f \quad \mathbb{R}^N\}.$$

Mit $\hat{f}$ wird die Fourier-Transformation einer Funktion $f \in L_1$ bezeichnet, d.h. $\hat{f} : \mathbb{R}^N \to \quad :$ $x \mapsto \int_{\mathbb{R}^N} f(t) e^{-i\langle x,t\rangle} \, dt$.

Definition 3.2. *Sei $\omega \in \mathcal{M}'$ und $K \quad \mathbb{R}^N$.*

(1) *Für $\lambda \in \mathbb{R}$, $f \in L_1$ setze:*

$$\|f\|_\lambda := \|\hat{f} e^{\lambda\omega}\|_{L_1}$$

(2) $\mathcal{D}_{(\omega)_\lambda}(K) := \{f \in C^\infty(\mathbb{R}^N) \mid \operatorname{supp} f \subseteq K \text{ und } \|f\|_\lambda < \infty\}$
(3) $\mathcal{D}_{(\omega)}(K) := \operatorname{proj}_{\lambda \to \infty} \mathcal{D}_{(\omega)_\lambda}(K)$
(4) *Für $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ offen, setze:*

$$\mathcal{D}_{(\omega)}(\Omega) := \operatorname{ind}_{K \quad \Omega} \mathcal{D}_{(\omega)}(K)$$

In der Arbeit von Björck ([**Bj**], siehe auch Beurling [**Be**] und Franken [**F**]). wurde gezeigt, daß diese Räume genau dann nicht trivial sind, wenn die Gewichtsfunktion (β) hat. $\mathcal{D}_{(\omega)}(K)$ ist ein nuklearer Fréchetraum und $\mathcal{D}_{(\omega)}(\Omega)$ ein (LFN)-Raum, wie in [**BMT**] gezeigt ist.

Satz 3.3 (Paley-Wiener). *Für $\omega \in \mathcal{M}'$, ein konvexes kompaktes $K \subseteq \mathbb{R}^N$ und eine ganze Funktion U sind äquivalent: ($H_K(y) := \sup_{x \in K} \langle x, y\rangle$)*

(1) *Es gibt ein $f \in \mathcal{D}_{(\omega)}(K)$ mit $\hat{f} = U$.*
(2) *Für jedes $\lambda > 0$ gibt es ein $C > 0$ so, daß für jedes $z \in {}^N$*

$$|U|(z) \leq C \exp(H_K(\operatorname{Im} z) - \lambda\omega(z))$$

gilt.

(3) *Für jedes $\lambda > 0$ gibt es ein $C > 0$ so, daß für alle $x, y \in \mathbb{R}^N$*

$$|U|(x + iy) \leq C \exp(H_K(y) - \lambda\omega(x))$$

gilt.

(4) *Für jedes $\lambda > 0$ gibt es ein $C > 0$ so, daß für jedes $y \in \mathbb{R}^N$*

$$\int_{\mathbb{R}^N} |U|(x+iy)e^{\lambda\omega(x)}\,dx \le Ce^{H_K(y)}$$

gilt.

(5) *Für jedes $\lambda > 0$ und jedes $\varepsilon > 0$ gibt es ein $C > 0$ so, daß für jedes $y \in \mathbb{R}^N$*

$$\int_{\mathbb{R}^N} |U|(x+iy)e^{\lambda\omega(x)}\,dx \le Ce^{H_K(y)+\varepsilon|y|}$$

gilt.

(6) *Für jedes $\lambda > 0$ und jedes $\varepsilon > 0$ gibt es ein $C > 0$ so, daß für alle $x, y \in \mathbb{R}^N$*

$$|U|(x+iy) \le Ce^{H_K(y)+\varepsilon|y|-\lambda\omega(x)}$$

gilt.

Beweis. Die Äquivalenz von (1) und (2) wurde in [**BMT**] Proposition 3.4 gezeigt.

„(2)⇒(3)“:Klar, da $\omega(x+iy) \ge \omega(x)$ gilt.

„(3)⇒(4)“: Wähle mit (γ') ein $\tilde\lambda > 0$ so, daß $\|e^{(\lambda-\tilde\lambda)\omega}\|_{L_1} < \infty$ ist. Für dieses $\tilde\lambda$ wähle ein C gemäß (3). Dann gilt:

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^N} |U|(x+iy)e^{\lambda\omega(x)}\,dx &\le C\int_{\mathbb{R}^N} e^{H_K(y)-(\tilde\lambda-\lambda)\omega(x)}\,dx\\ &\le Ce^{H_K(y)}\int_{\mathbb{R}^N} e^{-(\tilde\lambda-\lambda)\omega(x)}\,dx < \infty.\end{aligned}$$

„(4)⇒(5)“: Trivial, da nur ein $\varepsilon|y| \ge 0$ addiert wird.

„(5)⇒(6)“: Setze $S := \{z \in {}^N \mid \max_{i=1}^N |z_i| \le 1\}$, $S_x := \operatorname{Re} S$ und $S_y := \operatorname{Im} S$. Mit der Cauchyschen Integralformel erhält man dann:

$$\begin{aligned}|U|(z) &= |U|(z_1, z')\\ &\le \frac{1}{2\pi}\int_{|w_1|\le 1} |U|(z_1+w_1, z')\,dw_1.\end{aligned}$$

Iterativ folgt daher:

$$|U|(z) \le (\frac{1}{2\pi})^N \int_S |U|(z+w)\,dw.$$

Damit gilt dann:

$$|U(x+iy)|e^{\lambda\omega(x)} \le C\int_S |U(x+iy+w)|e^{\lambda\omega(x)}\,dw$$

da $\omega(x) \le K + K\omega(x+\operatorname{Re} w) + K\omega(\operatorname{Re} w)$

$$\le C\int_S |U(x+iy+w)|e^{K\lambda\omega(x+\operatorname{Re} w)+K\lambda\omega(\operatorname{Re} w)}\,dw$$

da $\sup_{z\in S}\omega(\operatorname{Re} z) < \infty$ und $S \subseteq S_x + iS_y$ gilt:

$$\le C\int_{S_y}\int_{S_x} |U(x+iy+r+is)|e^{K\lambda\omega(r+x)}\,dr\,ds$$

mit $m_N(S_y) \le 2^N$ folgt:

$$\begin{aligned}
&\le C2^N \sup_{s\in S_y} \int_{S_x} |U(x+iy+r+is)| e^{K\lambda\omega(r+x)}\,dr \\
&\le C \sup_{s\in S_y} \int_{\mathbb{R}^N} |U(x+i(y+s))| e^{K\lambda\omega(x)}\,dx \\
&\le C \sup_{s\in S_y} e^{H_K(y+s)+\varepsilon|y+s|} \le Ce^{H_K(y)+\varepsilon|y|}.
\end{aligned}$$

„(6)⇒(1)“: Sei $\varepsilon > 0$ beliebig gegeben. Mit

$$K_\varepsilon = K + \overline{B}_\varepsilon(0) = \{x \mid \operatorname{dist}(x,K) \le \varepsilon\}$$

gilt:

$$H_K(y) + \varepsilon|y| = H_K(y) + H_{B_\varepsilon}(y) = H_{K_\varepsilon}.$$

Sei $\lambda > 0$ beliebig gegeben. Nach (β) existiert dann für $\epsilon := \frac{\varepsilon}{2\lambda}$ ein $C > 0$ so, daß:

$$\omega(y) \le \epsilon|y| + C$$

für jedes $y \in \mathbb{R}^N$ gilt. Mit $\epsilon = \frac{\varepsilon}{2\lambda}$ folgt:

$$-\lambda\omega(x) \le \lambda + \lambda\omega(y) - \frac{\lambda}{K}\omega(x+iy) \le C + \lambda + \frac{\varepsilon}{2}|y| - \frac{\lambda}{K}\omega(x+iy).$$

Daher folgt:

$$\begin{aligned}
|U|(x+iy) &\le Ce^{H_K(y)+\frac{\varepsilon}{2}|y|-\lambda\omega(x)} \\
&\le Ce^{H_K(y)+\varepsilon|y|-\frac{\lambda}{K}\omega(x+iy)} \\
&= Ce^{H_{K_\varepsilon}(y)-\frac{\lambda}{K}\omega(x+iy)}.
\end{aligned}$$

Da $\lambda > 0$ beliebig war, existiert nach „(2)⇒(1)“ ein $f \in \mathcal{D}_{(\omega)}(K_\varepsilon)$ mit $\hat{f} = U$. Da $\varepsilon > 0$ beliebig war, folgt damit $\operatorname{supp} f \subseteq K$.

Für eine konvexe Funktion $\varphi : \mathbb{R}_{\ge 0} \to \mathbb{R}_{\ge 0}$ bezeichnet φ^* die *Young-Konjugierte*, d.h. $\varphi^*(x) := \sup_{y\ge 0}\Big(xy - \varphi(x)\Big)$. Setze $\varphi_\omega(t) := \omega(e^t)$.

Lemma 3.4. Für $f \in L_1$ und $K \subseteq \mathbb{R}^N$ kompakt und konvex sind äquivalent:

(1) $f \in \mathcal{D}_{(\omega)}(K)$
(2) $f \in C_c^\infty$ und $\forall k \in \mathbb{N}$:

$$\sup_{\alpha\in\mathbb{N}_0^N} \sup_{x\in\mathbb{R}^N} |f^{(\alpha)}(x)| e^{-k\varphi_\omega^*(\frac{|\alpha|}{k})} \le \infty$$

Beweis. siehe [**BMT**] 3.4.(2)

Korollar 3.5. *Sei $K \quad \mathbb{R}^N$ und $\omega \in \mathcal{M}'$ beliebig. Dann sind folgende Halbnormensysteme auf $\mathcal{D}_{(\omega)}(K)$ äquivalent:*

(1) $\Big(f \mapsto \|\hat{f}\|_\lambda\Big)_{\lambda>0}$
(2) $\Big(f \mapsto \sup_{x\in\mathbb{R}^N} |\hat{f}e^{\lambda\omega}|(x)\Big)_{\lambda>0}$

(3) $\left(f \mapsto \sup_{z\in\ ^N} \ |\hat{f}(z)e^{\lambda\omega(\operatorname{Re} z)-H_K(\operatorname{Im} z)-|\operatorname{Im} z|}|\right)_{\lambda>0}$

(4) $\left(f \mapsto \sup_{z\in\ ^N} \ |\hat{f}(z)e^{\lambda\omega(z)-H_K(\operatorname{Im} z)}|\right)_{\lambda>0}$

(5) $\left(\sup_{\alpha\in\mathbb{N}_0^N} \sup_{x\in\mathbb{R}^N} |f^{(\alpha)}(x)|e^{-k\varphi^*_\omega(\frac{|\alpha|}{k})}\right)_{k\in\mathbb{N}}$

Lemma 3.6. Sei $\omega \in \mathcal{M}'$. Für jeden Multiindex $\alpha \in \mathbb{N}_0^N$ ist die Abbildung

$$\mathcal{D}_{(\omega)}(\Omega) \to \mathcal{D}_{(\omega)}(\Omega) : f \mapsto D^\alpha f := (-i)^{|\alpha|}\frac{\partial^{|\alpha|}}{(\partial x)^\alpha} f$$

stetig.

Beweis. Sei $\lambda > 0$ beliebig gegeben. Dann gilt:

$$\|D^\alpha f\|_\lambda \ = \ \|x^\alpha \hat{f} e^{\lambda\omega}\|_{L_1} \overset{(\gamma)}{\leq} C\|e^{b|\alpha|\omega}\hat{f}e^{\lambda\omega}\|_{L_1} = C\|f\|_{\lambda+b|\alpha|} < \infty.$$

Für ein Polynom $P \in\ [z] =\ [z_1, \dots, z_N]$ mit $P(z) = \sum_{\substack{|\alpha|\leq m\\ \alpha\in\mathbb{N}_0^N}} a_\alpha z^\alpha$ ist nach obigem Lemma die Abbildung:

$$P(D) : \mathcal{D}_{(\omega)} \to \mathcal{D}_{(\omega)} : \phi \mapsto P(D)\,\phi := \sum_{\substack{|\alpha|\leq m\\ \alpha\in\mathbb{N}_0^N}} a_\alpha D^\alpha \phi$$

stetig und wohldefiniert.

Bemerkung 3.7. Für $\omega \in \mathcal{M}'$, $K \quad \mathbb{R}^N$, $f, g \in \mathcal{D}_{(\omega)}(K)$ und $\lambda > 0$ gilt:

$$\begin{aligned}
\|fg\|_\lambda &= \|\hat{f} * \hat{g}e^{\lambda\omega}\|_{L_1}\\
&= \|\int_{\mathbb{R}^N} \hat{f}(y)\hat{g}(x-y)e^{\lambda\omega(x)}\,dy\|_{L_1}
\end{aligned}$$

Wegen (α') gilt für alle $x, y \in \mathbb{R}^N$:

$$\omega(x) \leq K + K\omega(x-y) + K\omega(y)$$

und deswegen:

$$\begin{aligned}
&\leq C\|\int_{\mathbb{R}^N}(\hat{f}e^{K\lambda\omega})(y)(\hat{g}e^{K\lambda\omega})(x-y)\,dy\|_{L_1}\\
&\leq C\int_{\mathbb{R}^N}\int_{\mathbb{R}^N}(|\hat{f}|e^{K\lambda\omega})(y)(|\hat{g}|e^{K\lambda\omega})(x-y)\,dy\,dx\\
&\overset{\text{Fubini}}{=} C\|f\|_{K\lambda}\,\|g\|_{K\lambda}.
\end{aligned}$$

Damit ist nach Korollar 3.5 die Multiplikation auf $\mathcal{D}_{(\omega)}(K)$ als stetig nachgewiesen.

Definition 3.8. *Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ offen und $\omega \in \mathcal{M}'$ beliebig. Für jedes $K \quad \Omega$, $m \in \mathbb{N}$ setze:*

$$q_{K,m} : C^\infty(\Omega) \to \mathbb{R} : f \mapsto \sup_{\alpha\in\mathbb{N}_0^N}\sup_{x\in K}|f^{(\alpha)}(x)|e^{-m\varphi^*_\omega(\frac{|\alpha|}{m})}$$

und:

$$\mathcal{E}_{(\omega)}(\Omega) := \{f \in C^\infty(\Omega) \mid q_{K,m}(f) < \infty\}$$

mit dem Halbnormensystem $(p_{K,m})_{K\ \Omega, m\in\mathbb{N}}$

Satz 3.9. *Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ offen und $\omega \in \mathcal{M}'$ beliebig gegeben. Dann gilt:*

$$\mathcal{E}_{(\omega)}(\Omega) = \{f \in L_1^{loc} \mid \forall \varphi \in \mathcal{D}_{(\omega)}(\Omega) \,:\, \varphi f \in \mathcal{D}_{(\omega)}(\Omega)\}$$

mit den Halbnormen

$$\left(f \mapsto \|\varphi f\|_\lambda\right)_{\lambda>0, \varphi \in \mathcal{D}_{(\omega)}(\Omega)}.$$

Beweis. mit [**BMT**] 4.4 - 4.7

Setze $\mathcal{E}_{(\omega)} := \mathcal{E}_{(\omega)}(\mathbb{R}^N)$ und $\mathcal{D}_{(\omega)} := \mathcal{D}_{(\omega)}(\mathbb{R}^N)$. Nach [**BMT**] 4.10 gilt dann:

$$A(\ ^N) \subseteq \mathcal{E}_{(\omega)}\,.$$

Nach [**BMT**] 4.3 sind u.a. folgende Gewichtsfunktionen zulässig:

(1) mit $\omega(t) := t^\alpha$ $(0 < \alpha < 1)$ erhält man $\Gamma^{(1/\alpha)} := \mathcal{E}_{(\omega)}$, die „Gevery Klasse mit Exponent $1/\alpha$“.
(2) Mit $\omega(t) = \log(1+t)$ gilt $\mathcal{D}_{(\omega)} = C_c^\infty$ und $\mathcal{E}_{(\omega)} = C^\infty$.

4. $\mathcal{D}'_{(\omega)}(\Omega)$, $\mathcal{E}'_{(\omega)}(\Omega)$

Hier werden die Distributionsräume $\mathcal{D}'_{(\omega)}(\Omega)$ und $\mathcal{E}'_{(\omega)}(\Omega)$ eingeführt und das Konzept der Distributionen endlicher Ordnung $(\mathcal{D}'_F)$ auf $\mathcal{D}'_{(\omega)}$ ausgedehnt $(\mathcal{D}'_{(\omega)F})$.

Definition 4.1. *Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ offen und $\omega \in \mathcal{M}'$ beliebig. Definiere $\mathcal{D}'_{(\omega)}(\Omega)$ $(\mathcal{E}'_{(\omega)}(\Omega))$ als den Dualraum von $\mathcal{D}_{(\omega)}(\Omega)$ $(\mathcal{E}_{(\omega)}(\Omega))$ versehen mit der schwachen Topologie.*

Für $u \in \mathcal{D}'_{(\omega)}(\Omega)$ definierte $\operatorname{supp} u$ *als die Menge aller $x \in \Omega$, für die es keine offene Umgebung U von x mit $u|_{\mathcal{D}_{(\omega)}(U)} = 0$ gibt.*

Bemerkung 4.2. (1) Ein lineares Funktional u auf $\mathcal{D}_{(\omega)}(\Omega)$ ist genau dann stetig, wenn es für jedes Kompaktum $K \quad \Omega$ Zahlen λ, $C > 0$ gibt, mit:

$$\forall f \in \mathcal{D}_{(\omega)}(K) \,:\, |u(f)| \leq C|f|_\lambda \tag{4-1}$$

(2) Die Definition von $\operatorname{supp} u$ hängt nicht von der speziellen Wahl von ω ab, solange $u \in \mathcal{D}'_{(\omega)}$ gilt.
(3) Man kann $\mathcal{E}'_{(\omega)}(\Omega)$ mit $\{u \in \mathcal{D}'_{(\omega)} \mid \operatorname{supp} u \quad \Omega\}$ identifizieren.
(4) Für jedes $\omega \in \mathcal{M}'$ ist $\delta : f \mapsto f(0) \in \mathcal{E}'_{(\omega)}$.
(5) $\mathcal{D}'_{(\omega)}$ ist folgenvollständig, da $\mathcal{D}_{(\omega)}$ als (LFN)-Raum tonneliert ist.
(6) Mit $\langle Du, \phi\rangle := \langle u, -D\phi\rangle$ wird eine stetige lineare Abbildung definiert, die auf $\mathcal{D}_{(\omega)}$ mit der alten Definition 3.6 übereinstimmt.

Definition 4.3. *Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ offen und $\omega \in \mathcal{M}'$ beliebig. Für $u \in \mathcal{D}'_{(\omega)}(\Omega)$ und $f \in \mathcal{E}_{(\omega)}(\Omega)$ definiere:*

$$uf : \mathcal{D}_{(\omega)}(\Omega) \to \quad : \varphi \mapsto u(f\varphi).$$

Nach [**BMT**] 5.5 ist $uf \in \mathcal{D}'_{(\omega)}(\Omega)$.

Definition 4.4. *Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ offen und $\omega \in \mathcal{M}'$ beliebig. Definiere $\mathcal{D}'_{(\omega)F}(\Omega)$ als die Menge aller $u \in \mathcal{D}'_{(\omega)}$ für die λ in (4-1) unabhängig von K gewählt werden kann.*

5. Faltung

Die wichtigsten in dieser Arbeit benötigten Eigenschaften der Faltung (die Existenz von Abschneidefunktionen, Glätten, Theorem of supports) werden hier für $\mathcal{D}_{(\omega)}$ bzw. $\mathcal{E}'_{(\omega)}$ bereitgestellt.

Definition 5.1. *Sei $\omega \in \mathcal{M}'$ beliebig. Für $\mu \in \mathcal{E}'_{(\omega)}$, $\nu \in \mathcal{D}'_{(\omega)}$ und $f \in \mathcal{E}_{(\omega)}$ definiere:*

$$T_\mu(f) := \mu * f : \mathbb{R}^N \to \quad : x \mapsto \langle \mu_y, f(x-y) \rangle$$
$$S_\mu(\nu) := \mu * \nu : \mathcal{D}_{(\omega)} \to \quad : \varphi \mapsto \langle \mu, \check{\nu} * \varphi \rangle$$

wobei

$$\check{\nu} : \mathcal{D}_{(\omega)} \to \quad : \varphi \mapsto \langle \nu, \check{\varphi} \rangle \text{ und } \check{\varphi}(x) := \varphi(-x) \text{ ist.}$$

Nach [**BMT**] 6.3 sind die Abbildungen

$$T_\mu : \mathcal{E}_{(\omega)} \to \mathcal{E}_{(\omega)}$$

und

$$S_\mu : \mathcal{D}'_{(\omega)} \to \mathcal{D}'_{(\omega)}$$

stetig und wohldefiniert.

Lemma 5.2. Sei $\omega \in \mathcal{M}'$ beliebig. Für $f, g \in \mathcal{E}'_{(\omega)}$ gilt:

$$\operatorname{supp} f * g \subseteq \operatorname{supp} f + \operatorname{supp} g.$$

Beweis. Sei $\varphi \in \mathcal{D}_{(\omega)}$ mit $\operatorname{supp} \varphi \subseteq \mathbb{R}^N \backslash (\operatorname{supp} f + \operatorname{supp} g)$. Dann gilt:

$$\langle f * g, \varphi \rangle = \langle f, \check{g} * \varphi \rangle = 0.$$

Denn $\operatorname{supp} \check{g} * \varphi \subseteq \operatorname{supp} \varphi - \operatorname{supp} g$ und deswegen:

$$\operatorname{supp} f \cap \operatorname{supp} \check{g} * \varphi \subseteq \operatorname{supp} f \cap \operatorname{supp} \varphi - \operatorname{supp} g = \emptyset.$$

Bemerkung 5.3. Sei $\omega \in \mathcal{M}'$ beliebig. Dann gilt:

(1) Für jedes $K \quad \mathbb{R}^N$ gibt es ein $f \in \mathcal{D}_{(\omega)}(K)$ mit $f \geq 0$.
(2) Für jedes $r > 0$ gibt es $0 \leq f \in \mathcal{D}_{(\omega)}(B_r)$ mit $\hat{f} \geq 0$.

Beweis. „(1)“: Sei $g \in \mathcal{D}_{(\omega)}(K)$ beliebig. Wegen $\hat{\overline{g}} = \overline{\hat{\check{g}}}$ folgt $\|\overline{g}\|_\lambda = \|\check{g}\|_\lambda = \|g\|_\lambda$. Daher ist $\overline{g} \in \mathcal{D}_{(\omega)}(K)$. $f := g\overline{g}$ ist positiv und in $\mathcal{D}_{(\omega)}(K)$.

„(2)“: Sei $0 \leq g \in \mathcal{D}_{(\omega)}(B_{r/2})$ wie in (1). $f := g * \check{g}$ hat dann alle geforderten Eigenschaften, da für jede reellwertige Funktionen g $\hat{\overline{g}} = \hat{\check{g}} = \overline{\hat{g}}$ richtig ist. Daher gilt:

$$\widehat{g * \check{g}} = \hat{g}\hat{\check{g}} = \hat{g}\overline{\hat{g}} = |\hat{g}|^2 \geq 0$$

und

$$\operatorname{supp} f = \operatorname{supp}(g * \check{g}) \subseteq \operatorname{supp} g + \operatorname{supp} \check{g} \subseteq B_r.$$

Lemma 5.4. Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ offen und $\omega \in \mathcal{M}'$ beliebig. Für jedes $K \quad \Omega$ gibt es ein $g \in \mathcal{D}_{(\omega)}(\Omega)$ mit

$$0 \leq g \leq 1 \text{ und } g|_K \equiv 1.$$

Beweis. Sei $\varepsilon := \operatorname{dist}(K, \mathbb{R}^N \setminus \Omega) > 0$ und $0 \leq \tilde{f} \in \mathcal{D}_{(\omega)}(B_{\varepsilon/4})$. Setze

$$f := \frac{1}{\int_{\mathbb{R}^N} \tilde{f}\, dx} \tilde{f} \text{ und } g := \chi_{K+B_{\varepsilon/2}} * f.$$

Dann gilt:

$$\operatorname{supp} g \subseteq K + B_{\varepsilon/2} + B_{\varepsilon/4} \subseteq \Omega$$

und für $x \in K$:

$$g(x) = \int_{B_{\varepsilon/4}} \chi_{K+B_{\varepsilon/2}}(x-y) f(y)\, dy = 1.$$

Satz 5.5 (Glätten). *Sei $\omega \in \mathcal{M}'$ beliebig und $0 \leq \phi \in \mathcal{D}_{(\omega)}(B_1)$ mit $\int_{\mathbb{R}^N} \phi\, dx = 1$. Für $\varepsilon > 0$ setze*

$$\phi_\varepsilon(x) := \frac{1}{\varepsilon^N} \phi(\varepsilon x)$$

Dann gilt:

$$\operatorname{supp} \phi_\varepsilon \subseteq \varepsilon B_1$$
$$\phi_\varepsilon \to \delta \text{ in } \mathcal{D}'_{(\omega)}$$
$$|\hat{\phi}_\varepsilon| \leq 1$$

Für $u \in \mathcal{D}'_{(\omega)}$ gilt:

$$\phi_\varepsilon * u \to u \text{ in } \mathcal{D}'_{(\omega)}$$
$$\bigcap_{\varepsilon > 0} \operatorname{supp} u * \phi_\varepsilon \subseteq \operatorname{supp} u$$

Beweis. Für ϕ_ε gilt offensichtlich:

$$\operatorname{supp} \phi_\varepsilon \subseteq \varepsilon B_1 = B_\varepsilon \text{ und } \int_{\mathbb{R}^N} \phi_\varepsilon\, dx = 1.$$

Da $|\hat{\psi}| \leq \|\psi\|_{L_1}$ für jedes $\psi \in L_1$ gilt, folgt $|\hat{\phi}_\varepsilon| \leq 1$.

Sei $\varphi \in \mathcal{D}_{(\omega)}$ und $\varepsilon > 0$ beliebig. Da $\operatorname{supp} \varphi$ kompakt ist, ist φ gleichmäßig stetig. Deswegen existiert ein $\varepsilon_0 > 0$ so, daß für alle $0 < \tilde{\varepsilon} < \varepsilon_0$ und alle $x \in \mathrm{B}_{\tilde{\varepsilon}}$ gilt:

$$|\varphi(0) - \varphi(x)| < \varepsilon.$$

Damit gilt:

$$\begin{aligned} |\langle \phi_{\tilde{\varepsilon}}, \varphi \rangle - \varphi(0)| &= |\int_{\mathbb{R}^N} \varphi \phi_{\tilde{\varepsilon}}\, dx - \varphi(0)| \\ &\leq \int_{B_{\tilde{\varepsilon}}} |\varphi(x) - \varphi(0)| \phi_{\tilde{\varepsilon}}(x)\, dx \leq \varepsilon. \end{aligned}$$

Und damit $\phi_{\tilde{\varepsilon}} \to \delta$ in $\mathcal{D}'_{(\omega)}$. Wegen der Stetigkeit der Faltung folgt dann auch:

$$\phi_\varepsilon * u \to \delta * u = u.$$

Sei $x \in \bigcap_{\varepsilon>0} \operatorname{supp} u * \phi_\varepsilon$ beliebig. Dann gilt für jedes $\varepsilon > 0$:

$$x \in \operatorname{supp} u * \phi_\varepsilon \subseteq \operatorname{supp} u + B_\varepsilon.$$

Da $\operatorname{supp} u$ kompakt ist, folgt $x \in \operatorname{supp} u$.

Lemma 5.6. Sei $\omega_r \in \mathcal{M}$ $(r = 1, 2)$ mit $\omega_2 \prec \omega_1$. Dann ist die Einbettung $i : \mathcal{D}_{(\omega_1)} \to \mathcal{D}_{(\omega_2)}$ stetig mit dichtem Bild.

Beweis. Sei $f \in \mathcal{D}_{(\omega_1)}$ und A, C wie in Definition 2.3. Wegen

$$\|f\|_\lambda^{(\omega_2)} = \int_{\mathbb{R}^N} |\hat{f} e^{\lambda\omega_2}|\, dx \leq \int_{\mathbb{R}^N} |\hat{f}| e^{\lambda A + \lambda C \omega_1}\, dx = e^{\lambda A} \|f\|_{C\lambda}^{(\omega_1)} < \infty$$

ist i stetig und wohldefiniert. Sei nun $f \in \mathcal{D}_{(\omega_2)}$ beliebig und ϕ_ε wie in Satz 5.5. Dann ist $\phi_\varepsilon * f \in \mathcal{D}_{(\omega_1)}$ für $\phi \in \mathcal{D}_{(\omega_1)}$, und es gilt:

$$\|f - (f * \phi_\varepsilon)\|_\lambda^{(\omega_2)} = \int_{\mathbb{R}^N} |\hat{f}| e^{\lambda\omega_1} |1 - \hat{\phi}_\varepsilon|\, dx.$$

Mit dem Lebesgueschen Grenzwertsatz folgt die Behauptung, da

$$|\hat{\phi}_\varepsilon| \leq 1 \text{ für alle } \varepsilon > 0.$$

Offensichtlich gilt daher für zwei äquivalente Gewichtsfunktionen ω_1, $\omega_2 \in \mathcal{M}'$:

$$\mathcal{D}_{(\omega_1)} = \mathcal{D}_{(\omega_2)}.$$

Satz 5.7 (Theorem of supports). *Sei $\omega \in \mathcal{M}'$ beliebig. Für $u_1, u_2 \in \mathcal{E}'_{(\omega)}$ gilt:*

$$\operatorname{ch} \operatorname{supp} u_1 * u_2 = \operatorname{ch} \operatorname{supp} u_1 + \operatorname{ch} \operatorname{supp} u_2.$$

Beweis. Da

$$\operatorname{supp} u_1 * u_2 \subseteq \operatorname{supp} u_1 + \operatorname{supp} u_2$$

und deswegen immer

$$\operatorname{ch} \operatorname{supp} u_1 * u_2 \subseteq \operatorname{ch} \operatorname{supp} u_1 + \operatorname{ch} \operatorname{supp} u_2$$

gilt, bleibt die andere Inklusion zu zeigen.

Für $\varepsilon > 0$, $\phi_\varepsilon \in \mathcal{D}_{(\omega)}$ wie oben folgt aus dem „Theorem of supports" in [**H2**], Theorem 4.3.3:

$$\begin{aligned} \operatorname{ch} \operatorname{supp}(u_1 * \phi_\varepsilon) + \operatorname{ch} \operatorname{supp}(u_2 * \phi_\varepsilon) &= \operatorname{ch} \operatorname{supp}(u_1 * \phi_\varepsilon * u_2 * \phi_\varepsilon) \\ &\subseteq \operatorname{ch} \operatorname{supp}(u_1 * u_2) + 2 \operatorname{ch} \operatorname{supp} \phi_\varepsilon \\ &\subseteq \operatorname{ch} \operatorname{supp}(u_1 * u_2) + 2\varepsilon B_1. \end{aligned}$$

(Da $\mathcal{D}_{(\omega)} \subseteq C_c^\infty := C_c^\infty(\mathbb{R}^N) \subseteq \mathcal{E}'$ gilt.) Für $\varepsilon \to 0$ folgt die Behauptung aus Satz 5.5.

6. $\mathcal{S}_\omega$, $\mathcal{S}'_\omega$, $\mathcal{F}_\omega$ und die Fouriertransformation

Die für die Untersuchung der Fouriertransformation wichtigen Räume $\mathcal{S}$ und $\mathcal{S}'$ werden hier auf $\mathcal{S}_\omega$ und $\mathcal{S}'_\omega$ ausgedehnt und einige für $\mathcal{S}$ bekannte (wichtige) Eigenschaften (z.B. die Dichtheit von $\mathcal{D}_{(\omega)}$ in $\mathcal{S}_\omega$, die Inversionsformel und die Verträglichkeit von Fouriertransformation und Faltung) werden für $\mathcal{S}_\omega$ ($\mathcal{S}'_\omega$) nachgerechnet. Am Ende dieses Kapitels wird dann der Satz von Paley-Wiener-Schwartz für $\mathcal{E}'_{(\omega)}$ angegeben.

Definition 6.1. *Sei $\omega \in \mathcal{M}'$. Für $f \in C^\infty := C^\infty(\mathbb{R}^N)$ mit $\hat{f} \in C^\infty(\mathbb{R}^N)$, $\lambda \geq 0$ und $\alpha \in \mathbb{N}_0^N$ setze:*

$$p_{\alpha,\lambda}(f) := \sup_{x \in \mathbb{R}^N} e^{\lambda\omega} |D^\alpha f|$$

$$\pi_{\alpha,\lambda}(f) := \sup_{x \in \mathbb{R}^N} e^{\lambda\omega} |D^\alpha \hat{f}|$$

sowie

$$\mathcal{S}_\omega := \{f \mid \forall \alpha, \lambda \,:\, p_{\alpha,\lambda}(f) < \infty \text{ und } \pi_{\alpha,\lambda} < \infty\}.$$

In $\mathcal{S} := \{f \in C^\infty \mid \sup_{x \in \mathbb{R}^N} |x^\beta D^\alpha f| < \infty,\ \forall \alpha, \beta \in \mathbb{N}_0^N\}$, dem Raum der *schnell fallenden Funktionen*, gilt für $f, g \in \mathcal{S}$

$$\hat{f} \in \mathcal{S},\ fg \in \mathcal{S},\ \widehat{fg} = (2\pi)^{-N} \hat{f} * \hat{g},\ \hat{\hat{\hat{f}}} = (2\pi)^N f$$

wie man z.B. in [**H2**] Kapitel 7 lesen kann. Offenbar gilt $\mathcal{S}_{\log(1+.)} = \mathcal{S}$.

Lemma 6.2. Für jedes $\omega \in \mathcal{M}'$ gilt $\mathcal{S}_\omega \subseteq \mathcal{S}$. Die Fouriertransformation ist ein stetiger Automorphismus auf $\mathcal{S}_\omega$.

Beweis. Sei $f \in \mathcal{S}_\omega$, $\alpha, \beta \in \mathbb{N}_0^N$ beliebig. Für b wie in (γ) gilt mit $\lambda \geq \frac{|\beta|}{b}$ für jedes $x \in \mathbb{R}^N$:

$$|x^\beta D^\alpha f(x)| \leq C e^{\lambda\omega(x)} |D^\alpha f(x)| \leq p_{\alpha,\lambda}(f) < \infty.$$

Damit gilt $f \in \mathcal{S}$ und $\mathcal{S}_\omega \subseteq \mathcal{S}$. Also steht auf $\mathcal{S}_\omega$ die Fourierumkehrformel zur Verfügung, d.h. für jedes $f \in \mathcal{S}_\omega$ gilt:

$$f = (2\pi)^{-N} \hat{\hat{\hat{f}}}.$$

Da für jedes $\alpha \in \mathbb{N}_0^N$ und $\lambda > 0$

$$p_{\alpha,\lambda}(\hat{f}) = \pi_{\alpha,\lambda}(f) \quad \text{und} \quad \pi_{\alpha,\lambda}(\hat{f}) = (2\pi)^{-N} p_{\alpha,\lambda}(f)$$

gilt, ist die Fouriertransformation ein stetiger Automorphismus in $\mathcal{S}_\omega$.

Zusätzlich zur Umkehrformel gelten noch für beliebige $f,\ g \in \mathcal{S}_\omega$:

$$\widehat{f * g} = \hat{f}\hat{g}$$

und

$$\widehat{fg} = (2\pi)^{-N} \hat{f} * \hat{g},$$

da diese Formeln in $\mathcal{S}$ gelten.

Lemma 6.3. Sei $\omega \in \mathcal{M}'$ beliebig. Dann sind punktweise Multiplikation und Faltung stetig in $\mathcal{S}_\omega$.

BEWEIS. Seien $f, g \in \mathcal{S}_\omega$, $\alpha \in \mathbb{N}_0^N$ und $\lambda > 0$ beliebig. Dann gilt:

$$\begin{aligned} p_{\alpha,\lambda}(fg) &= \sup_{x\in\mathbb{R}^N} e^{\lambda\omega(x)}|D^\alpha(fg)|(x) \\ &= \sup_{x\in\mathbb{R}^N} e^{\lambda\omega(x)}|\sum_{\beta\leq\alpha}\binom{\alpha}{\beta}D^\beta f D^{\alpha-\beta}g|(x) \\ &\leq \sum_{\beta\leq\alpha}\binom{\alpha}{\beta}p_{\beta,\lambda}(f)p_{\alpha-\beta,0}(g). \end{aligned}$$

Wegen

$$D^\alpha\widehat{fg} = (2\pi)^{-N}D^\alpha(\hat{f} * \hat{g}) = (2\pi)^{-N}(D^\alpha\hat{f}) * \hat{g}$$

gilt:

$$\pi_{\alpha,\lambda}(fg) \;=\; \|e^{\lambda\omega}D^\alpha\widehat{fg}\|_{L_\infty} = (2\pi)^{-N}\|(D^\alpha\hat{f}) * \hat{g}e^{\lambda\omega}\|_{L_\infty}$$

Nach (α') gilt: $\omega(x) \leq K + K\omega(y-x) + K\omega(y)$. Damit kann man weiter abschätzen:

$$\leq C\|(e^{K\lambda\omega}D^\alpha\hat{f}) * (e^{K\lambda\omega}\hat{g})\|_{L_\infty} \leq C\|e^{K\lambda\omega}D^\alpha\hat{f}\|_{L_1}\,\|e^{K\lambda\omega}\hat{g}\|_{L_\infty}$$

mit γ aus (γ') gilt dann:

$$\begin{aligned} &= C\|e^{(K\lambda+\gamma)\omega}D^\alpha\hat{f}e^{-\gamma\omega}\|_{L_1}\,\pi_{0,K\lambda}(g) \\ &\leq C\pi_{\alpha,K\lambda+\gamma}(f)\,\pi_{0,K\lambda}(g)\int_{\mathbb{R}^N} e^{-\gamma\lambda\omega}\,dx \leq C\pi_{\alpha,K\lambda+\gamma}(f)\,\pi_{0,K\lambda}(g). \end{aligned}$$

Wegen

$$f * g = (2\pi)^{-N}\hat{\hat{\hat{f}}} * \hat{\hat{\hat{g}}} = (2\pi)^{-N}\widehat{\hat{\hat{f}}\hat{\hat{g}}}$$

folgt die zweite Behauptung aus der ersten.

LEMMA 6.4. Für jedes $\omega \in \mathcal{M}'$ gilt:

$$\mathcal{D}_{(\omega)} \subseteq \mathcal{S}_\omega \subseteq \mathcal{E}_{(\omega)}\,.$$

BEWEIS. Sei $f \in \mathcal{D}_{(\omega)}$, $\alpha \in \mathbb{N}_0^N$ und $\lambda > 0$ gegeben. Da $\operatorname{supp} f$ kompakt ist, ist $p_{\alpha,\lambda} < \infty$. Es gilt:

$$\pi_{\alpha,\lambda}(f) \;=\; \|e^{\lambda\omega}D^\alpha\hat{f}\|_{L_\infty} = \|e^{\lambda\omega(x)}\widehat{x^\alpha f(x)}\|_{L_\infty,x}$$

Da $x^\alpha \in A(\mathbb{R}^N) \subseteq \mathcal{E}_{(\omega)}$ und deswegen $x^\alpha f \in \mathcal{D}_{(\omega)}$ gilt, folgt mit „Paley-Wiener“:

$$\pi_{\alpha,\lambda}(f) \;<\; \infty.$$

Sei $g \in \mathcal{S}_\omega$ und $\varphi \in \mathcal{D}_{(\omega)}$. Da $\varphi \in \mathcal{S}_\omega$ ist, folgt mit Lemma 6.3:

$$\|\widehat{g\varphi}e^{\lambda\omega}\|_{L_\infty} = \pi_{0,\lambda}(f\varphi) < \infty.$$

Da $\operatorname{supp}(g\varphi)$ kompakt ist und $g\varphi \in \mathcal{D}$ gilt, folgt die Behauptung mit 3.5.

LEMMA 6.5. $\mathcal{D}_{(\omega)}$ ist dicht in $\mathcal{S}_\omega$ für jedes $\omega \in \mathcal{M}'$.

Beweis. Sei $\psi \in \mathcal{S}_\omega$. Wähle $\varphi \in \mathcal{D}_{(\omega)}(B_{1/2})$ mit $\varphi|_{\overline{B}_{1/4}} \equiv 1$ und $0 \leq \varphi \leq 1$. Definiere für $\varepsilon > 0$ $\psi_{(\varepsilon)}(x) := \psi(x)\varphi(\varepsilon x) \in \mathcal{D}_{(\omega)}$. Zeige: $\psi_{(\varepsilon)} \to \psi$ in $\mathcal{S}_\omega$.

Sei $\alpha \in \mathbb{N}_0^N$ und $\lambda \geq 0$ beliebig. Zeige:

$$p_{\alpha,\lambda}(\psi_{(\varepsilon)} - \psi) \to 0 \tag{6-1}$$

und

$$\pi_{\alpha,\lambda}(\psi_{(\varepsilon)} - \psi) \to 0. \tag{6-2}$$

Für jedes $x \in \mathbb{R}^N$ gilt:

$$\begin{aligned} |D^\alpha(\psi_{(\varepsilon)} - \psi)(x)| &= |\sum_{\beta \leq \alpha} \binom{\alpha}{\beta} D^\beta \varphi(\varepsilon x) D^{\alpha-\beta}\psi(x) - D^\alpha \psi(x)| \\ &\leq |\sum_{0<\beta\leq\alpha} \binom{\alpha}{\beta} \varepsilon^{|\beta|} (D^\beta\varphi)(x\varepsilon) D^{\alpha-\beta}\psi(x)| + (|\varphi(\varepsilon x) - 1) D^\alpha \psi(x)| \end{aligned}$$

Da $\sup_{x\in\mathbb{R}^N} D^\beta|\varphi|(\varepsilon x) = \sup_{x\in\mathbb{R}^N} D^\beta|\varphi|(x)$ ist, gilt:

$$\leq e^{-\lambda\omega(x)} \sum_{0<\beta\leq\alpha} \binom{\alpha}{\beta} \varepsilon^{|\beta|} p_{\beta,0}(\varphi)\, p_{\alpha-\beta,\lambda}(\psi) + p_{\alpha,\lambda+1}(\psi) \sup_{|y|\geq 1/(4\varepsilon)} e^{-\omega(y)}$$

Insgesamt erhält man folgende Abschätzung:

$$p_{\alpha,\lambda}(\psi_{(\varepsilon)} - \psi) \leq \sum_{0<\beta\leq\alpha} \binom{\alpha}{\beta} \varepsilon^{|\beta|} p_{\beta,0}(\varphi)\, p_{\alpha-\beta,\lambda}(\psi) + p_{\alpha,\lambda+1}(\psi) e^{-\omega(\frac{1}{4\varepsilon}}$$

Da $\varphi \in \mathcal{S}_\omega$ und $|\beta| \geq 1$ gilt, folgt (6-1).

Um (6-2) zu zeigen, betrachte zunächst für festes $x \in \mathbb{R}^N$:

$$\widehat{\varphi(\varepsilon.)}(x) = \int_{\mathbb{R}^N} \varphi(\varepsilon t) e^{-i\langle t,x\rangle}\, dt = \varepsilon^{-N} \int_{\mathbb{R}^N} \varphi(t) e^{-i\langle t, \frac{1}{\varepsilon}x\rangle}\, dt = \varepsilon^{-N} \hat{\varphi}(\frac{1}{\varepsilon}x).$$

Damit erhält man:

$$\begin{aligned} &|D^\alpha \hat{\psi}_{(\varepsilon)}(x) - D^\alpha \hat{\psi}(x)| \\ &= |(2\pi)^{-N} D^\alpha(\hat{\psi} * \widehat{\varphi(\varepsilon.)}) - D^\alpha \hat{\psi}|(x) \\ &= |(2\pi)^{-N} \int_{\mathbb{R}^N} (D^\alpha \hat{\psi})(x-y) \hat{\varphi}(\frac{1}{\varepsilon}y) \varepsilon^{-N}\, dy - D^\alpha \hat{\psi}(x)| \\ &= |(2\pi)^{-N} \int_{\mathbb{R}^N} \hat{\varphi}(y) D^\alpha \hat{\psi}(x - \varepsilon y)\, dy - D^\alpha \hat{\psi}(x)| \end{aligned}$$

Wegen

$$(2\pi)^{-N} \int_{\mathbb{R}^N} \hat{\varphi}\, dy = (2\pi)^{-N} \hat{\hat{\varphi}}(0) = \check{\varphi}(0) = 1$$

gilt:

$$\begin{aligned}
&= |(2\pi)^{-N}\int_{\mathbb{R}^N}\hat\varphi(y)\Big((D^\alpha\hat\psi)(x-\varepsilon y)-D^\alpha\hat\psi(x)\Big)\,dy| \\
&\le (2\pi)^{-N}\int_{\mathbb{R}^N}|\hat\varphi(y)|\,|(D^\alpha\hat\psi)(x-\varepsilon y)-D^\alpha\hat\psi(x)|\,dy \\
&= (2\pi)^{-N}(\int_B+\int_U)|\hat\varphi(y)|\,|(D^\alpha\hat\psi)(x-\varepsilon y)-D^\alpha\hat\psi(x)|\,dy \\
&=: (2\pi)^{-N}(I_B+I_U)
\end{aligned}$$

wobei $B := B_{|x|}(0)+\varepsilon^{\frac{-1}{N+2}}B_1$ und $U := \mathbb{R}^N\setminus B$. Für jedes l aus (γ') gilt dann:

$$\begin{aligned}
I_U &\le 2\pi_{\alpha,0}(\psi)(2\pi)^{-N}\int_U|\hat\varphi|\,dy \\
&\le C\|\hat\varphi e^{(l+\lambda)\omega}\|_{L_\infty}\int_U e^{-(l+\lambda)\omega}\,dy \\
&\le C\sup_{y\in U}e^{-\lambda\omega(y)}\int_U e^{-l\omega}\,dy
\end{aligned}$$

Da $x\notin U$ gilt $|x|\le \inf_{y\in U}|y|$ und deswegen:

$$\le Ce^{-\lambda\omega(x)}\int_{\mathbb{R}^N\setminus B_{\varepsilon^{-1/(N+2)}}} e^{-l\omega}\,dy.$$

Da $B_{\varepsilon^{-1/(N+2)}}\nearrow\mathbb{R}^N$ für $\varepsilon\to 0$ folgt mit dem Lebesgueschen Grenzwertsatz:

$$I_U e^{\lambda\omega(x)}\to 0 \text{ gleichmäßig.}$$

Sei K $\mathbb{R}^N$ und $\delta>0$ beliebig. Da $\hat\psi$ auf $B+K$ gleichmäßig stetig ist, gibt es ein ε_0 so, daß für jedes $0<\varepsilon\le\varepsilon_0$, jedes $x\in K$ und $y\in B$ gilt:

$$|\hat\psi(x-\varepsilon y)-\hat\psi(x)|\le\delta$$

Dewegen gilt für $x\in K$:

$$I_B(x)\le(2\pi)^{-N}\delta\int_B|\hat\varphi(y)|\,dy$$

d.h.: Auf jedem Kompaktum K konvergiert I_B gleichmäßig gegen 0. Deswegen gilt:

$$\sup_{|x|\in K} I_B(x)e^{\lambda\omega(x)}\to 0 \text{ für } \varepsilon\to 0$$

Um (6-2) zu zeigen, reicht es deswegen

$$\sup_{|x|\ge 2} I_B(x)e^{\lambda\omega(x)}\to 0 \tag{6-3}$$

zu zeigen. Seien $|x| \geq 4$ und $0 < \varepsilon < \frac{1}{2}$ beliebig gegeben. Dann gilt:

$$\begin{aligned}
|I_B|(x) &\leq (2\pi)^{-N} m_N(B_{|x|+\varepsilon^{-1/(N+2)}}) \sup_{y\in B} |\hat{\varphi}(y)| \sup_{y\in B} |D^\alpha \hat{\psi}(x-\varepsilon y) - D^\alpha \hat{\psi}(x)| \\
&\overset{\text{MWS}}{\leq} C(|x| + \varepsilon^{\frac{-1}{N+2}})^N \sup_{y\in B} \sup_{t\in[0,1]} |\langle \operatorname{grad} D^\alpha \hat{\psi}(x - t\varepsilon y), \varepsilon y\rangle| \\
&\overset{\text{Cauchy-Schwarz}}{\leq} C(|x| + \varepsilon^{\frac{-1}{N+2}})^N \sup_{y\in B} \varepsilon |y| \sup_{t\in[0,1]} |\operatorname{grad} D^\alpha \hat{\psi}(x - t\varepsilon y)| \\
&\leq C\varepsilon(|x| + \varepsilon^{\frac{-1}{N+2}})^{N+1} \sup_{y\in B} \sum_{|\beta|=|\alpha|+1} |D^\beta \hat{\psi}(x-\varepsilon y)| \\
&\leq C\varepsilon^{1-\frac{N+1}{N+2}}(|x|+1)^{N+1} \sum_{|\beta|=|\alpha|+1} \sup_{y\in B} |D^\beta \hat{\psi}(x-\varepsilon y) e^{l\omega(4(x-\varepsilon y))}| e^{-l\omega(4(x-\varepsilon y))}
\end{aligned}$$

Da $|\varepsilon y| \leq \varepsilon|x| + \varepsilon^{\frac{N+1}{N+2}} \leq \frac{1}{2}x + \frac{1}{2} \leq \frac{3}{4}\varepsilon$ für $y \in B$ gilt, ist $|x - \varepsilon y| \geq \frac{1}{4}|x|$. Mit $\omega(4z) \leq C + K^2\omega(z)$ und der Monotonie von ω kann weiter abgeschätzt werden:

$$\begin{aligned}
&\leq C\varepsilon^{1-\frac{N+1}{N+2}}(|x|+1)^{N+1} \sum_{|\beta|=|\alpha|+1} \pi_{\beta,l}(\psi) e^{-l\omega(\varepsilon(|x|+1)) - \frac{l}{K}\omega(x)} \\
&\leq C\varepsilon^{1/(N+2)}(|x|+1)^{N+1} e^{-\frac{l}{K}\omega(x)}
\end{aligned}$$

Mit b aus (γ) gilt:

$$\leq \quad C\varepsilon^{1/(N+2)} e^{(\frac{N+1}{b} - \frac{l}{K})\omega(x)}$$

Mit $l := K(\frac{N+1}{b} - \lambda)$ gilt dann:

$$\leq \quad C\varepsilon^{1/(N+2)} e^{-\lambda\omega(x)}.$$

Damit sind dann folgende Aussagen gezeigt:

$$\begin{aligned}
I_B(x)e^{\lambda\omega(x)} &\leq C\varepsilon^{1/(N+2)} \\
I_U(x)e^{\lambda\omega(x)} &\to 0 \quad \text{gleichmäßig}
\end{aligned}$$

Damit folgen (6-2) und die Behauptung.

Definition 6.6. *Sei $\omega \in \mathcal{M}'$ beliebig. Eine stetige Linearform auf $\mathcal{S}_\omega$ heißt* ω-temperierte Distribution. *Die Menge aller ω-temperierten Distributionen, versehen mit der schwachen Topologie, heißt $\mathcal{S}'_\omega$.*

Definition 6.7. *Auf $\mathcal{S}'_\omega$ definiert man die Fouriertransformation durch:*

$$\forall \phi \in \mathcal{S}_\omega \ : \ \hat{u}(\phi) = \langle \hat{u}, \phi\rangle := \langle u, \hat{\phi}\rangle. \tag{6-4}$$

Äquivalent (mit der Inversionsformel) zu (6-4) ist

$$\forall \phi \in \mathcal{S}_\omega \ : \ \hat{u}(\hat{\phi}) = (2\pi)^N \langle u, \check{\phi}\rangle.$$

Definition 6.8. *Für $\omega \in \mathcal{M}'$ sei $\mathcal{F}_\omega$ die Menge aller $u \in \mathcal{D}'_{(\omega)}$, für die es $U \in L_1^{loc}$ und $\lambda > 0$ gibt, mit:*

$$\int_{\mathbb{R}^N} |U| e^{-\lambda\omega}\, dx < \infty$$

und

$$\forall \phi \in \mathcal{D}_{(\omega)} \; : \; u(\phi) = (2\pi)^{-N} \int_{\mathbb{R}^N} U \hat{\hat{\phi}} \, dx.$$

Offensichtlich gelten:

$$\mathcal{F}_\omega \subseteq \mathcal{S}'_\omega \quad \text{und} \quad \hat{u} = U.$$

SATZ 6.9. *Für jedes $\omega \in \mathcal{M}'$ und jedes $u \in \mathcal{E}'_{(\omega)}$ gilt:*

$$u \in \mathcal{S}'_\omega \quad \textit{und} \quad \hat{u}(x) = u_t(e^{-i\langle x,t\rangle}) \in A(\ ^N).$$

BEWEIS. Nach [**BMT**] 7.1 ist $e^{-i\langle z,t\rangle} \in \mathcal{E}_{(\omega)}$ für jedes $z \in \ ^N$. Da u stetig ist, gilt für jedes $\varphi \in \mathcal{S}_\omega$:

$$\begin{aligned} \hat{u}(\varphi) \; &= \; u(\hat{\varphi}) = u_x(\int_{\mathbb{R}^N} \varphi(t) e^{-i\langle x,t\rangle} \, dt) \\ &= \int_{\mathbb{R}^N} \varphi(t) u_x(e^{-i\langle x,t\rangle}) \, dt = \langle \varphi_t, u_x(e^{-i\langle x,t\rangle})\rangle. \end{aligned}$$

Der Rest folgt dann mit [**BMT**] 7.2 .

SATZ 6.10. *Für jedes $\omega \in \mathcal{M}'$, $\varphi \in \mathcal{S}_\omega$ und $u \in \mathcal{S}'_\omega$ gilt:*

$$\varphi * u : \psi \mapsto u(\check{\varphi} * \psi) \in \mathcal{S}'_\omega \qquad \text{und} \qquad \widehat{\varphi * u} = \hat{\varphi}\hat{u}.$$

BEWEIS. Da nach Lemma 6.3 die Faltung in $\mathcal{S}_\omega$ stetig ist, folgt die Stetigkeit von $\varphi * u$ sofort. Nach Definition 6.7 gilt dann:

$$\widehat{u * \varphi}(\psi) = (u * \varphi)(\hat{\psi}) = u(\check{\varphi} * \hat{\psi}).$$

Mit der Fourierumkehrformel, die man auf $\mathcal{S}_\omega \subseteq \mathcal{S}$ nach Lemma 6.2 zur Verfügung hat, gilt:

$$\widehat{\hat{\varphi}\psi} = (2\pi)^{-N} \hat{\hat{\varphi}} * \hat{\psi} = \check{\varphi} * \hat{\psi}.$$

Insgesamt wurde dann folgendes gezeigt:

$$\widehat{\varphi * u}(\psi) = u(\check{\varphi} * \hat{\psi}) = u(\widehat{\hat{\varphi}\psi}) = \hat{u}\hat{\varphi}(\psi).$$

KOROLLAR 6.11. *Sei $\omega \in \mathcal{M}'$ beliebig. Für $u \in \mathcal{F}_\omega$ und $\varphi \in \mathcal{S}_\omega$ gilt:*

$$\varphi * u \in \mathcal{F}_\omega \qquad \text{und} \qquad \widehat{\varphi * u} = \hat{\varphi}\hat{u}$$

sowie

$$\varphi u \in \mathcal{F}_\omega \qquad \text{und} \qquad \widehat{\varphi u} = (2\pi)^{-N} \hat{\varphi} * \hat{u} = (2\pi)^{-N} \int_{\mathbb{R}^N} \hat{\varphi}(t) \hat{u}(. - t) \, dt.$$

BEWEIS. Da $\mathcal{F}_\omega \subseteq \mathcal{S}'_\omega$ gilt, reicht es

$$\varphi * u \in \mathcal{F}_\omega \qquad \text{und} \qquad \varphi u \in \mathcal{F}_\omega$$

zu zeigen. Dies folgt aber sofort, da $\hat{u} \in L_1^{loc}$ mit $\|\hat{u}e^{-\lambda\omega}\|_{L_1} < \infty$ und $\hat{\varphi}e^{\lambda\omega} \in L_\infty$ ist.

SATZ 6.12 (Paley-Wiener-Schwartz). *Sei $K \subseteq \mathbb{R}^N$ kompakt und konvex. Für eine ganze Funktion U und $\omega \in \mathcal{M}'$ sind äquivalent:*

(1) *Es gibt ein $\mu \in \mathcal{E}'_{(\omega)}(K) := \{u \in \mathcal{D}'_{(\omega)} \mid \operatorname{supp} u \subseteq K\}$ mit $\hat{\mu} = U$.*

(2) *Es gibt ein $\lambda > 0$ so, daß es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $C > 0$ gibt mit*

$$|U(z)| \le Ce^{H_K(\operatorname{Im} z)+\varepsilon|\operatorname{Im} z|+\lambda\omega(\operatorname{Re} z)}$$

für jedes $z \in {}^N$.

(3) *Es gibt ein $\lambda > 0$ so, daß es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $C > 0$ gibt mit*

$$\int_{\mathrm{IR}^N} |U(x+iy)|\,dx \le Ce^{H_K(y)+\varepsilon|y|+\lambda\omega(x)}$$

für jedes $y \in \mathrm{IR}^N$.

Beweis. „(1) $\Longleftrightarrow$ (2):" [**BMT**] 7.2, 7.3.

„(2) $\Longleftrightarrow$ (3):" Analog der entsprechenden Äquivalenz in Satz 3.3.

Satz 6.13. *Sei $\omega \in \mathcal{M}'$ beliebig. Für $u_1 \in \mathcal{E}'_{(\omega)}$ und $u_2 \in \mathcal{F}_\omega$ gilt dann:*

$$u_1 * u_2 \in \mathcal{F}_\omega \qquad \text{und} \qquad \widehat{u_1 * u_2} = \hat{u}_1\hat{u}_2.$$

Beweis. Nach Satz 6.12 gilt $\mathcal{E}'_{(\omega)} \subseteq \mathcal{F}_\omega$. Sei nun $\varphi \in \mathcal{D}_{(\omega)}$; dann gilt:

$$(u_1 * u_2)(\varphi) = u_1 * u_2 * \check{\varphi}(0) = u_2(\check{u}_1 * \varphi).$$

Da $\check{u}_1 * \varphi \in \mathcal{D}_{(\omega)}$ ist, gilt nach Definition 6.8 und Korollar 6.11:

$$(u_1 * u_2)(\varphi) = \langle u_2, \check{u}_1 * \varphi\rangle = (2\pi)^N\langle \hat{u}_2, \hat{u}_1\check{\hat{\varphi}}\rangle = (2\pi)^N\langle \hat{u}_1\hat{u}_2, \check{\hat{\varphi}}\rangle.$$

Da $\hat{u}_1$ nach 6.10 ganz ist und $\hat{u}_2 \in L_1^{loc}$ gilt, liegt $\hat{u}_1\hat{u}_2$ in L_1^{loc}, und es gilt:

$$\widehat{u_1 * u_2}(\varphi) = (2\pi)^N \int_{\mathrm{IR}^N} \hat{u}_1\hat{u}_2\check{\hat{\varphi}}\,dx$$

für jedes $\varphi \in \mathcal{D}_{(\omega)}$. Nach dem „Satz von Paley-Wiener-Schwartz" existieren $C,\lambda_1 > 0$ so, daß für jedes $x \in \mathrm{IR}^N$ $|\hat{u}_1|(x) \le Ce^{\lambda_1\omega(x)}$ gilt. Aus der Definition 6.8 folgt die Existenz von $\lambda_2 > 0$ mit $\int_{\mathrm{IR}^N} |\hat{u}_2|e^{-\lambda_2\omega}\,dx < \infty$. Zusammen gilt dann:

$$\begin{aligned}\int_{\mathrm{IR}^N} |\hat{u}_1\hat{u}_2|e^{-(\lambda_1+\lambda_2)\omega}\,dx &\le C\int_{\mathrm{IR}^N} e^{\lambda_1\omega}|\hat{u}_2|e^{-(\lambda_1+\lambda_2)\omega}\,dx\\ &= \int_{\mathrm{IR}^N} |\hat{u}_2|e^{-\lambda_2\omega}\,dx < \infty\end{aligned}$$

Nach 6.8 ist damit die Behauptung gezeigt.

7. Der singuläre Träger ($\operatorname{sing}_\omega \operatorname{supp}$)

Nachdem der singuläre Träger eingeführt worden ist und einige elementare Eigenschaften gezeigt wurden, wird ein Analogon zu dem Satz von Paley-Wiener für den singulären Träger bewiesen.

Definition 7.1. *Sei $\omega \in \mathcal{M}'$ und $u \in \mathcal{D}'_{(\omega)}(\Omega)$ beliebig gegeben.* $\operatorname{sing}_\omega \operatorname{supp} u$ *ist die Menge aller Punkte $x \in \Omega$ für die es keine offene Umgebung U gibt, so daß $u|_{\mathcal{D}_{(\omega)}(U)} \in \mathcal{E}_{(\omega)}(U)$ gilt.*

Für $\omega = \log(1 + |.|)$ erhält man so den üblichen singulären Träger.

Bemerkung 7.2. Sei $\omega \in \mathcal{M}'$ sowie $u \in \mathcal{D}'_{(\omega)}$ beliebig gegeben. Dann gilt:

(1) $x \notin \mathrm{sing}_\omega \operatorname{supp} u \iff$ Es gibt ein $\delta > 0$ so, daß $\mathcal{D}_{(\omega)}(B_\delta(x))u \subseteq \mathcal{D}_{(\omega)}$ gilt.
(2) Für jedes $\phi \in \mathcal{D}_{(\omega)}$ gilt: $\mathrm{sing}_\omega \operatorname{supp} \phi u \subseteq \mathrm{sing}_\omega \operatorname{supp} u$.
(3) Für $\phi \in \mathcal{D}_{(\omega)}$ mit $\phi \equiv 1$ auf einer Umgebung von sing_ω supp gilt:

$$\mathrm{sing}_\omega \operatorname{supp} \phi u = \mathrm{sing}_\omega \operatorname{supp} u.$$

(4) Für jedes $v \in \mathcal{E}'_{(\omega)}$ gilt: $\mathrm{sing}_\omega \operatorname{supp} v * u \subseteq \mathrm{sing}_\omega \operatorname{supp} v + \mathrm{sing}_\omega \operatorname{supp} u$.
(5) Es gilt $\mathrm{sing}_\omega \operatorname{supp} P(D)(u) \subseteq \mathrm{sing}_\omega \operatorname{supp} u$.

Beweis. „(1)$\Rightarrow$:“ Nach Definition 7.1 gibt es eine offene Umgebung U von x mit $u|_{\mathcal{D}_{(\omega)}(U)} \in \mathcal{E}_{(\omega)}(U)$ gilt. Daher gilt für $\delta > 0$ so, daß $B_\delta(x) \subseteq U$ ist, nach Satz 3.9: $\mathcal{D}_{(\omega)}(B_\delta(x))u \subseteq \mathcal{D}_{(\omega)}$.

„(1)$\Leftarrow$:“ Direkte Folge von Satz 3.9.

„(2):“ Seien $\psi \in \mathcal{D}_{(\omega)}$ und $x \in \mathbb{R}^N \setminus \mathrm{sing}_\omega \operatorname{supp} u$ beliebig gegeben. Nach (1) gibt es ein $\delta > 0$ so, daß $\mathcal{D}_{(\omega)}(B_\delta(x))u \subseteq \mathcal{D}_{(\omega)}$ gilt. Daher gilt auch $\mathcal{D}_{(\omega)}(B_\delta(x))\phi u \in \mathcal{D}_{(\omega)}$. Mit (1) folgt damit die Behauptung.

„(3):“ Nach (2) bleibt nur nach die andere Inklusion zu zeigen. Angenommen, es gäbe ein $x \in \mathrm{sing}_\omega \operatorname{supp} u \setminus \mathrm{sing}_\omega \operatorname{supp} \phi u$. Nach (1) gibt es dann ein $\delta_1 > 0$ so, daß $\mathcal{D}_{(\omega)}(B_{\delta_1}(x))\phi u \subseteq \mathcal{D}_{(\omega)}$. Da $\phi \equiv 1$ auf einer Umgebung von $\mathrm{sing}_\omega \operatorname{supp} u$ gilt, gibt es ein $\delta_2 > 0$ so, daß $\psi \equiv 1$ auf $\mathrm{sing}_\omega \operatorname{supp} u + B_{\delta_2}(x)$ gilt. Mit $\delta := \min(\delta_1, \delta_2)$ folgt daher: $\mathcal{D}_{(\omega)} \supseteq \mathcal{D}_{(\omega)}(B_\delta(x))\phi u = \mathcal{D}_{(\omega)}(B_\delta(x))u$.

„(4):“ Wähle $\psi \in \mathcal{D}_{(\omega)}$ mit $\psi \equiv 1$ auf einer Umgebung von $\mathrm{sing}_\omega \operatorname{supp} v$ und setze: $v_1 = \psi v$ und $v_2 = (1-\psi)v = v - v_1$. Dann ist $v_2 \in \mathcal{D}_{(\omega)}$ und deswegen gilt $u * v_2 \in \mathcal{E}_{(\omega)}$. Für jedes $\psi \in \mathcal{D}_{(\omega)}\{x \in \mathbb{R}^N \setminus (\mathrm{sing}_\omega \operatorname{supp} u + \operatorname{supp} v_1)\}$ gilt dann $\psi(u * v_1) \in \mathcal{D}_{(\omega)}$. Damit ist dann

$$\mathrm{sing}_\omega \operatorname{supp} u * v = \mathrm{sing}_\omega \operatorname{supp} u * v_1 \subseteq \mathrm{sing}_\omega \operatorname{supp} u + \operatorname{supp} v_2 \subseteq \mathrm{sing}_\omega \operatorname{supp} u + \operatorname{supp} \psi$$

gezeigt. Für $\operatorname{supp} \psi \to \mathrm{sing}_\omega \operatorname{supp} v$ folgt dann die Behauptung.

„(5):“ Es gilt $P(D)\, u = P(D)\, \delta * u$ und daher mit (4):

$$\mathrm{sing}_\omega \operatorname{supp} P(D)\, u \subseteq \mathrm{sing}_\omega \operatorname{supp} P(D)\, \delta + \mathrm{sing}_\omega \operatorname{supp} u = \mathrm{sing}_\omega \operatorname{supp} u.$$

Lemma 7.3. Sei $K \subseteq \mathbb{R}^N$ kompakt und konvex, sowie $\xi \in \mathbb{R}^N \setminus K$. Dann gibt es ein $y \in \mathbb{R}^N$ so, daß $H_K(y) - \langle y, \xi \rangle < -1$ ist.

Beweis. Direkte Folgerung aus dem Satz von Hahn-Banach.

Lemma 7.4. Unter den Voraussetzungen von 7.3 gibt es $y \in \mathbb{R}^N$, $\varepsilon_0 > 0$ und $\delta > 0$ so, daß für jedes $0 \leq \varepsilon \leq \varepsilon_0$ und $\tilde{\xi} \in \mathrm{B}_\delta(\xi)$

$$H_{K+B_\varepsilon}(y) - \langle y, \tilde{\xi} \rangle < -1$$

gilt.

Beweis. Da $\xi \notin K$ gilt, ist $\varepsilon_0 := \frac{1}{2}\operatorname{dist}(\xi, K) > 0$. Da $K_0 := K + \overline{B}_{\varepsilon_0}$ kompakt und konvex ist, mit $\xi \notin K_0$, gibt es nach 7.3 ein $y \in \mathbb{R}^N$ mit

$$H_{K+B_{\varepsilon_0}}(y) - \langle y, \xi \rangle < -1.$$

Da das Skalarprodukt stetig ist, gibt es $\delta > 0$ so, daß obige Ungleichung für $\tilde{\xi} \in \mathrm{B}_\delta(\xi)$ gilt. Für $0 \leq \varepsilon \leq \varepsilon_0$ und $\tilde{\xi} \in B_\delta(\xi)$ gilt dann:

$$H_{K+B_\varepsilon}(y) - \langle \tilde{\xi}, y \rangle \leq H_{K+B_{\varepsilon_0}}(y) - \langle \xi, y \rangle < -1.$$

Lemma 7.5. Seien $a_j < b_j$ $(1 \leq j \leq N+1)$. Setze $A := \bigtimes_{j=1}^{N+1} [a_j, b_j]$. Für $H \in C^2(A, {}^N)$ und $F \in A({}^N)$ gilt dann:

$$\int_{\partial A} H^*\Big(F(z_1, \ldots, z_N)\, dz_1 \wedge \ldots \wedge dz_N\Big) = 0.$$

Beweis. Es gilt:

$$dF = \sum_{j=1}^{N} \frac{\partial}{\partial x_j} F\, dx_j + \sum_{j=1}^{N} \frac{\partial}{\partial y_j} F\, dy_j.$$

Da F holomorph ist, folgt mit den Cauchy–Riemannschen Differentialgleichungen für $1 \leq j \leq N$: $\frac{\partial}{\partial y_j} F = i \frac{\partial}{\partial x_j} F$. Da $\frac{1}{2}(dx + i\, dy) = dz$ ist, gilt:

$$dF = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{N} \frac{\partial}{\partial x_j} F\, dz_j.$$

Mit dem Satz von Stokes (siehe [**Ma**] XIV.4.5) gilt daher (wegen $d(H^*F) = H^*dF$):

$$\int_{\partial A} H^*\Big(F\, dz_1 \wedge \ldots \wedge dz_N\Big) = \int_A H^*\Big(dF \wedge dz_1 \wedge \ldots \wedge dz_N\Big) = 0.$$

Damit kann man nun ein Analogon zu dem Satz von „Paley-Wiener“ für singulären Träger beweisen:

Satz 7.6. *Seien $\omega_1 \prec \omega \in \mathcal{M}'$ sowie $u \in \mathcal{E}'_{(\omega_1)}$ beliebig. Für eine kompakte, konvexe Menge K im $\mathbb{R}^N$ sind äquivalent:*

(1) $\operatorname{sing}_\omega \operatorname{supp} u \subseteq K$
(2) *Es gibt ein $\lambda > 0$ so, daß es für jedes $m \in \mathbb{N}$ eine Zahl $C_m > 0$ gibt, mit der*

$$|y| \leq m\omega(x) \quad \Rightarrow \quad |\hat{u}(x + iy)| \leq C_m e^{\lambda\omega_1(x) + H_K(y) + |y|/m} \tag{7-1}$$

gilt.

Beweis. „(1)⇒(2):“ Da u stetig ist, gibt es λ, $C > 0$ mit

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}_{\omega_1} \;:\; |u(\varphi)| \leq C \|\hat{\varphi} e^{\lambda\omega_1}\|_{L_\infty}. \tag{7-2}$$

Sei $m \in \mathbb{N}$ fixiert. Wähle nun $\psi \in \mathcal{D}_{(\omega)}(K + B_{1/(2m)})$ mit $\psi \equiv 1$ auf einer Umgebung von K. Setze

$$u_1 := \psi u \qquad \text{und} \qquad u_2 := u - u_1.$$

Dann ist $u_1 \in \mathcal{E}'_{(\omega_1)}$, da $\mathcal{D}_{(\omega)} \subseteq \mathcal{D}_{(\omega_1)}$. Da nach Konstruktion $\mathrm{sing}_\omega \,\mathrm{supp}\, u_2 = \emptyset$ gilt und der Träger von u_2 kompakt ist, folgt $u_2 \in \mathcal{D}_{(\omega)}$. Es gilt:

$$\begin{aligned}\forall \varphi \in \mathcal{D}_{(\omega_1)} \;:\; |u_2(\varphi)| &= |\langle u_2, \varphi\rangle| = (2\pi)^{-N}|\langle \hat{u}_2, \hat{\varphi}\rangle| \\ &\leq (2\pi)^{-N}\int_{\mathbb{R}^N} |\hat{u}_2\hat{\varphi}|\,dx \leq (2\pi)^{-N}\|\hat{\varphi}\|_{L_\infty}\int_{\mathbb{R}^N}|\hat{u}_2|\,dx \\ &\leq C\|\hat{\varphi}e^{\lambda\omega_1}\|_{L_\infty}.\end{aligned}$$

Deswegen gilt für u_1:

$$\begin{aligned}\forall \varphi \in \mathcal{D}_{(\omega_1)} \;:\; |u_1(\varphi)| &= |u-u_2|(\varphi) \overset{(7\text{-}2)}{\leq} C\|\hat{\varphi}e^{\lambda\omega_1}\|_{L_\infty} + \tilde{C}\|\hat{\varphi}e^{\lambda\omega_1}\|_{L_\infty} \\ &\leq C\|\hat{\varphi}e^{\lambda\omega_1}\|_{L_\infty}.\end{aligned} \tag{7-3}$$

Für $\delta \in \mathcal{D}_{(\omega_1)}(K + B_{1/(2m)} + B_{1/(4m)})$ mit $\delta \equiv 1$ auf einer Umgebung von $K + B_{1/(2m)}$ gilt:

$$\widehat{\delta e^{-i\langle .,z\rangle}}(y) = \hat{\delta}(z+y)$$

und

$$|\hat{u}_1|(z) = |u_1(\delta e^{-i\langle z,.\rangle})| \overset{(7\text{-}3)}{\leq} C\|\hat{\delta}(x+z)e^{\lambda\omega_1(x)}\|_{L_\infty,x}$$

Paley-Wiener (3.3) mit $\varepsilon = \frac{1}{4m}$ ergibt:

$$\leq C_\lambda \|e^{H_{K+B_{1/(2m)}+B_{1/(4m)}}(\mathrm{Im}\, z) + \frac{|\mathrm{Im}\, z|}{4m} - \Lambda\omega_1(x+\mathrm{Re}\, z) + \lambda\omega_1(x)}\|_{L_\infty,x}$$

mit $\Lambda := K\lambda$ und $-\Lambda\omega_1(x+\mathrm{Re}\, z) \overset{(\alpha')}{\leq} \Lambda\omega_1(x) - \frac{\Lambda}{K}\omega_1(\mathrm{Re}\, z) + \Lambda$

$$\leq C_\lambda e^{H_K(\mathrm{Im}\, z) + \frac{|\mathrm{Im}\, z|}{m} + \lambda K\omega_1(\mathrm{Re}\, z)}$$

Da $u_2 \in \mathcal{D}_{(\omega)}$ ist, gibt es ein $n > 0$ mit $u_2 \in \mathcal{D}_{(\omega)}(B_n)$. Mit „Paley-Wiener“ folgt dann für jedes $\Lambda > 0$:

$$|\hat{u}_2|(z) \leq C_\Lambda e^{H_{B_n}(\mathrm{Im}\, z) - \Lambda\omega(\mathrm{Re}\, z)} = C_\Lambda e^{n|\mathrm{Im}\, z| - \Lambda\omega(\mathrm{Re}\, z)}.$$

Sei nun $z \in {}^N$ mit $|\mathrm{Im}\, z| \leq m\omega(\mathrm{Re}\, z)$ fixiert. Dann gilt:

$$H_K(\mathrm{Im}\, z) = \sup_{y\in K}\langle y, \mathrm{Im}\, z\rangle \geq -|\mathrm{Im}\, z|\sup_{y\in K}|y| \geq -C_K m\omega(\mathrm{Re}\, z) \tag{7-4}$$

Wegen $\hat{u} = \hat{u}_1 + \hat{u}_2$ gilt:

$$\begin{aligned}|\hat{u}|(z) &\leq |\hat{u}_1|(z) + |\hat{u}_2|(z) \\ &\leq C_\lambda e^{H_K(\mathrm{Im}\, z) + \frac{|\mathrm{Im}\, z|}{m} + \lambda K\omega_1(\mathrm{Re}\, z)} + C_\Lambda e^{n|\mathrm{Im}\, z| - \Lambda\omega(\mathrm{Re}\, z)} \\ &\leq C_\lambda e^{H_K(\mathrm{Im}\, z) + \frac{|\mathrm{Im}\, z|}{m} + \lambda K\omega_1(\mathrm{Re}\, z)} + C_\Lambda e^{nm\omega(\mathrm{Re}\, z) - \Lambda\omega(\mathrm{Re}\, z)} \\ &= C_\lambda e^{H_K(\mathrm{Im}\, z) + \frac{|\mathrm{Im}\, z|}{m} + \lambda K\omega_1(\mathrm{Re}\, z)} + C_\Lambda e^{(nm-\Lambda)\omega(\mathrm{Re}\, z)}.\end{aligned}$$

Wegen (β) und (7-4) gilt: $H_K(\mathrm{Im}\, z) + \frac{|\mathrm{Im}\, z|}{m} + \lambda K\omega_1(\mathrm{Re}\, z)$

$$\begin{aligned}&\geq -mC_K\omega(\mathrm{Re}\, z) + \omega(\mathrm{Re}\, z) \\ &= (1 - mC_K)\omega(\mathrm{Re}\, z)\end{aligned}$$

Für $\Lambda \geq m(C_K + n) + 1$ gilt:

$$\leq (C_\lambda + C_\Lambda)e^{H_K(\mathrm{Im}\, z) + \frac{|\mathrm{Im}\, z|}{m} + \lambda K\omega_1(\mathrm{Re}\, z)}.$$

Mit $C_m := C_\lambda + C_\Lambda$ folgt (2).

„(2)⇒(1):“ Zeige zunächst, daß (2) auch für jede zu ω äquivalente Gewichtsfunktion $\tilde{\omega} \in \mathcal{M}'$ gilt.

Sei $m \in \mathbb{N}$ fixiert und wähle C und λ gemäß (2). Aus der Äquivalenz folgt die Existenz von $a,b \in \mathbb{R}$ mit

$$\tilde{\omega} \leq a\omega + b.$$

Da $0 \leq \omega \nearrow \infty$ gilt, gibt es ein $R > 0$ so, daß für jedes $x \in \mathbb{R}^N$ mit $|x| > R$ $\omega(x) \geq \omega(R) \geq 1$ ist. Setze $Q := \{(x,y) \in \mathbb{R}^{2N} \mid |y| \leq m\omega(R), |x| \leq R\}$. Da Q kompakt ist, ist

$$C_Q := \sup_{(x,y)\in Q} \Big(|\hat{u}|(x+iy) e^{-\lambda\omega_1 - H_K(y) - |y|/m} \Big) < \infty.$$

Für $(x,y) \notin Q$ gilt (da $\omega(x) \geq 1$ ist):

$$\tilde{\omega}(x) \leq a\omega(x) + b \leq (a+b)\omega(x).$$

Daher gilt dann für alle $x,y \in \mathbb{R}^N$ mit $|y| \leq m\tilde{\omega}(x)$:

$$|\hat{u}|(x+iy) \leq \left\{ \begin{array}{ll} C_Q & \text{für } (x,y) \in Q \\ C & \text{sonst} \end{array} \right\} e^{\lambda\omega_1 + H_K(y) + |y|/m}.$$

Damit ist dann $(2)_\omega \Rightarrow (2)_{\tilde{\omega}}$ gezeigt. Da die andere Richtung analog gezeigt werden kann, kann man daher nach Satz 2.4 o.B.d.A. $\omega \in C^\infty$ annehmen.

Es bleibt $u \in \mathcal{E}_{(\omega)}(\mathbb{R}^N \setminus K)$ zu zeigen. Nach Satz 3.9 reicht es für jedes $\xi_0 \in \mathbb{R}^N \setminus K$ eine kompakte Umgebung U zu finden so, daß für jedes $\varphi \in \mathcal{D}_{(\omega)}(U)$ und jedes $\lambda > 0$

$$\|\varphi u\|_\lambda < \infty \tag{7-5}$$

gilt.

Sei daher $\xi_0 \in \mathbb{R}^N \setminus K$ beliebig gegeben. Wähle hierzu $\varepsilon_0 > 0$, $y \in \mathbb{R}^N$ und $\delta > 0$ gemäß Lemma 7.4. Setze $U := \overline{B}_{\delta/2}(\xi_0)$. Dann gilt:

$$H_K(y) + H_U(-y) \leq -1. \tag{7-6}$$

Fixiere $\phi \in \mathcal{D}_{(\omega)}(U)$. Dann gilt für ϕu:

$$\widehat{u\phi}(\tilde{x}) \;=\; \hat{\phi} * \hat{u}(\tilde{x}) = \int_{\mathbb{R}^N} \hat{u}(t)\hat{\phi}(\tilde{x} - t)\,dt.$$

Definiere für $s > 0$ Abbildungen:

$$H : [0,1] \times \mathbb{R}^N \to {}^N : (t,x) \mapsto x + itsy\omega(x)$$

$$H_R := H|_{A_R} \text{ mit } A_R := [0,1] \times [-R,R]^N$$

$$\Phi_1(x) := H(0,x) \qquad \text{und} \qquad \Phi_2(x) := H(1,x).$$

Offenbar gilt $\Phi_2 = \lim_{R\to\infty} H_R(1,.)$ und $\Phi_1 = \lim_{R\to\infty} H_R(0,.)$.

Da nach Konstruktion $\omega \in C^\infty$ ist, ist H ebenfalls beliebig oft differenzierbar. Setze für $\tilde{x} \in \mathbb{R}^N$: $F(z) := F_{\tilde{x}}(z) := \hat{u}(z)\hat{\phi}(\tilde{x} - z) \in A({}^N)$. Für $A := A_R$ und H gilt nach Lemma 7.5 $(dz := dz_1 \wedge \ldots \wedge dz_N)$:

$$\int_{\partial A} H^*(F\,dz) = 0.$$

Offensichtlich ist $\widehat{u\phi}(\tilde{x}) = \int_{\mathbb{R}^N} \Phi_1^*(F\,dz)$. Zeige:

$$\int_{\mathbb{R}^N} \Phi_1^*(F\,dz) = \int_{\mathbb{R}^N} \Phi_2^*(F\,dz). \tag{7-7}$$

Sei $z \in \operatorname{Bild} H_R$ beliebig. Dann ist $\operatorname{Im} z = sty\omega(x)$ und $\operatorname{Re} z = x$. Wähle $m \in \mathbb{N}$ mit $|sy| \leq m$. Nach (7-1) gibt es dann $\lambda, C_m = C_s > 0$ so, daß

$$|\hat{u}|(z) \leq C_s e^{\lambda\omega_1(x) + st\omega(x)H_K(y) + t\omega(x)\frac{s|y|}{m}}.$$

Da $\omega_1 \prec \omega$ gilt, gibt es $a > 0$ und $b \in \mathbb{R}$ mit $\omega_1 \leq a\omega + b$. Damit erhält man:

$$|\hat{u}|(z) \leq C_s e^{(a\lambda + stH_K(y) + t)\omega(x)}.$$

Da $\phi\,\mathcal{D}_{(\omega)}(U)$ ist, gibt es nach „Paley–Wiener“ für jedes $\Lambda > 0$ ein $C_\Lambda > 0$ mit

$$\begin{aligned} |\hat{\phi}|(\tilde{x} - z) &\leq C_\Lambda e^{st\omega(x)H_U(-y) - \Lambda\omega(\tilde{x} - x)} \\ &\overset{(\alpha')}{\leq} \begin{cases} C_\Lambda e^{st\omega(x)H_U(-y) - \frac{\Lambda}{K}\omega(x) + \Lambda\omega(\tilde{x})} \\ C_\Lambda e^{st\omega(x)H_U(-y) + \Lambda\omega(x) - \frac{\Lambda}{K}\omega(\tilde{x})}. \end{cases} \end{aligned}$$

Damit kann man dann insgesamt abschätzen:

$$\begin{aligned} |F|(z) &= |\hat{u}(z)\hat{\phi}(\tilde{x} - z)| \\ &\leq C_{s,\Lambda} e^{\omega(x)(stH_K(y) + stH_U(-y) + ay + 1} \begin{cases} e^{-\frac{\Lambda}{K}\omega(x) + \Lambda\omega(\tilde{x})} \\ e^{\Lambda\omega(x) - \frac{\Lambda}{K}\omega(\tilde{x})} \end{cases} \\ &\overset{(7\text{-}6)}{\leq} C_{s,\Lambda} \begin{cases} e^{\omega(x)(1 + a\lambda - st - \frac{\Lambda}{K}) + \Lambda\omega(\tilde{x})} & (7\text{-}8) \\ e^{\omega(x)(1 + a\lambda - st + \Lambda) - \frac{\Lambda}{K}\omega(\tilde{x})}. & (7\text{-}9) \end{cases} \end{aligned}$$

Da

$$\begin{aligned} \partial A_R &= (\{0\} \times [-R, R]^N) \cup (\{1\} \times [-R, R]^N) \cup \\ &\quad \bigcup_{j=1}^{N} ([0, 1] \times [-R, R]^{j-1} \times \{\pm R\} \times [-R, R]^{N-j}) \\ &=: A_1^{(R)} \cup A_2^{(R)} \cup \bigcup_{j=1}^{N} B_{\pm j}^{(R)} \end{aligned}$$

gilt, erhält man mit $\Psi_{\pm j}(t, x', x'') := \Psi_{\pm j}^{(R)}(t, x', x'') := H(t, x', \pm R, x'')$ $(1 \leq j \leq N,\ x' \in \mathbb{R}^{j-1},\ x'' \in \mathbb{R}^{N-j},\ x \in \mathbb{R}^N)$ dann:

$$\begin{aligned} \int_{\delta A} H^*(F\,dz) &= -\int_{A_1} \Phi_1^*(F\,dz) + \int_{A_2} \Phi_2^*(F\,dz) \\ &\quad + \sum_{j=1}^{N} \int_{B_j} \Psi_j^*(F\,dz) - \sum_{j=1}^{N} \int_{B_{-j}} \Psi_{-j}^*(F\,dz). \end{aligned}$$

Zeige: $\int_{B_{\pm j}^{(R)}} \Psi_{\pm j}^{(R)*}(F\,dz) \to 0$ für $R \to \infty$. O.b.d.A. zeigt man dies nur für $j = 1$, da sich die B's nur durch Permutation der letzten $N-1$ Koordinaten unterscheiden. Da für $H = (H_1, \ldots, H_N)^{tr}$, $y = (y_1, \ldots, y_N)^{tr}$

$$\left|\Big(\frac{\partial}{\partial t} H_l|_{(t,x)}\Big)_{1 \leq l \leq N}\right| = \left|is\Big(y_l\omega(x)\Big)_{1 \leq l \leq N}\right| \leq s|y|\omega(x) \tag{7-10}$$

und

$$|\Big(\frac{\partial}{\partial x_j} H_l|_{(t,x)}\Big)_{1\le l\le N}| = |\Big(\delta_{l,j} + isty_j \frac{\partial}{\partial x_j}\omega(x)\Big)_{1\le l\le N}| \le 1 + Cs|y| \tag{7-11}$$

gilt, erhält man:

$$\begin{aligned} d\Psi_{\pm 1} \ &= \ d\Psi_{\pm 1,1} \wedge \ldots \wedge \Psi_{\pm 1,N} \\ &= \ \bigwedge_{l=1}^{N} \Big(\frac{\partial}{\partial t} H(t,\pm R,x'')\,dt + \sum_{l=2}^{N} \frac{\partial}{\partial x_l} H(t,\pm R,x'')\,dx_l\Big) \\ &= \ \det(\Big(isy_l\omega(x)\Big)_{1\le l\le N}, \Big(\delta_{l,j} + isy_j \frac{\partial}{\partial x_l}\omega(R,x'')\Big)_{\substack{1\le j\le N\\ 2\le l\le N}}) \\ &\qquad\qquad dt \wedge dx_2 \wedge \ldots \wedge dx_N. \end{aligned} \tag{7-12}$$

Aus den Abschätzungen (7-10) und (7-11) folgt daher:

$$|\det(\Big(isy_l\omega(x)\Big)_{1\le l\le N}, \Big(\delta_{l,j} + isy_j \frac{\partial}{\partial x_l}\omega(R,x'')\Big)_{\substack{1\le j\le N\\ 2\le l\le N}})| \ \le \ s|y|\omega(R,x'')(1 + Cs|y|)^{N-1}. \tag{7-13}$$

Wenn man dies in (7-8) einsetzt, so erhält man:

$$\begin{aligned} |\int_{B_1} \Psi_1^*(F dz)| \ &= \ |\int_{B_1} F \circ \Psi_1 d\Psi_1| \\ &= \ |\int_{B_1} F \circ \Psi_1 \det(\ldots)\, d(t,x'')| \\ &\le \ C_{\Lambda,s} \int_{[0,1]} \int_{\mathbb{R}^{N-1}} e^{(1+a\lambda - st + t - \frac{\Lambda}{K})\omega(R,x'') + \Lambda\omega(\tilde{x})} \\ &\qquad s|y|\omega(R,x'')(1+s|y|)^{N-1}\, dx''\, dt \\ &\le \ C_{\Lambda,s,\tilde{x}} \int_{\mathbb{R}^{N-1}} e^{(a\lambda + 2 - \frac{\Lambda}{K})\omega(R,x'')}\, dx''. \end{aligned}$$

Da nach (γ') für $\Lambda > \Lambda_0$ das Integral endlich ist und der Integrand punktweise monoton gegen Null strebt, folgt mit dem Lebesgueschen Grenzwertsatz:

$$|\int_{B_1} \Psi_1^*(F dz)| \to 0 \text{ für } R \to \infty.$$

Ebenfalls mit „Lebesgue“ folgt:

$$\int_{A_1} \Phi_1^*(F dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_N) = \int_{[-R,R]^N} F \circ \Phi_1\, dx \to \int_{\mathbb{R}^N} F\, dx.$$

(Da $d\Phi_1 = dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_N$ ist.)

Ähnlich wie in (7-12) erhält man:

$$d\Phi_2 = \det(\Big(\delta_{l,j} + isy_j \frac{\partial}{\partial x_j}\omega(x)\Big)_{1\le j,l\le N})\, dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_N$$

und

$$|\det(\Big(\delta_{l,j} + isy_j \frac{\partial}{\partial x_j}\omega(x)\Big)_{1\le j,l\le N})| \le C(1 + s|y|)^N.$$

Da die Determinante berschränkt ist, erhält man sofort

$$\int_{A_2} \Phi_2^*(|F|\, dz) \ \le \ C \int_{A_1} \Phi_1^*(|F|\, dz) \le C \int_{\mathbb{R}^N} \Phi_1^*(|F|\, dz) < \infty.$$

Mit „Lebesgue" folgt dann (7-7).

Auf Bild Φ_2 kann man mit (7-9) abschätzen und erhält für $s > s_0$ mit (γ') (wegen $t = 1$):

$$
\begin{aligned}
|\int_{A_2} \Phi_2^*(F(z)\,dz)| &\leq C_{\Lambda,s} \int_{\mathbb{R}^N} e^{\omega(x)(1+a\lambda-s+\Lambda)-\frac{\Lambda}{K}\omega(\tilde{x})}\,dx \\
&= C_{\Lambda,s} e^{-\frac{\Lambda}{K}\omega(\tilde{x})}.
\end{aligned}
$$

Damit ist dann nach Korollar 3.5 (7-5) gezeigt.

Korollar 7.7. *Für $\omega \in \mathcal{M}'$, $u \in \mathcal{E}'$ und $K \subseteq \mathbb{R}^N$ kompakt, konvex sind äquivalent:*

(1) $\text{sing}_\omega \text{supp}\, u \subseteq K$
(2) *Es gibt ein $\lambda > 0$ so, daß es für jedes $m \in \mathbb{N}$ ein $C_m > 0$ gibt, mit:*

$$|y| \leq m\omega(x) \Rightarrow |\hat{u}|(x+iy) \leq C_m(1+|x|)^\lambda e^{H_K(y)+\frac{|y|}{m}}.$$

Beweis. Mit $\omega_1 = \log(1+|x|)$ folgt aus (γ) und Satz 7.6 die Behauptung, da $\mathcal{E}_{\omega_1} = \mathcal{E}$ gilt.

Korollar 7.8. *Für $\omega \in \mathcal{M}'$, $u \in \mathcal{E}'_{(\omega)}$ und $K \subseteq \mathbb{R}^N$ kompakt, konvex sind äquivalent:*

(1) $\text{sing}_\omega \text{supp}\, u \subseteq K$
(2) *Es gibt ein $\lambda > 0$ so, daß es für jedes $m \in \mathbb{N}$ ein $C_m > 0$ mit*

$$|y| \leq m\omega(x) \Rightarrow |\hat{u}|(x+iy) \leq C_m e^{H_K(y)+\frac{|y|}{m}+\lambda\omega(x)}$$

gibt.

Beweis. Mit $\omega_1 = \omega$ und $\tilde{\lambda} = \lambda + 1$ folgt dies aus Satz 7.6.

KAPITEL 2

Einige spezielle Teilräume von $\mathcal{D}'_{(\omega)}$

Um im nächsten Kapitel die Lösbarkeit von $P(D)\,u = f$ mit $f \in \mathcal{E}'_{(\omega)}$ und $f \in \mathcal{D}'{}_{(\omega)F}$ gleichzeitig untersuchen zu können, werden hier weitere Teilräume von $\mathcal{D}'_{(\omega)}$ untersucht. Nachdem die „temperierten Gewichtsfunktionen“ aus dem 10. Kapitel von Hörmander ([**H2**]) an die modifizierten Voraussetzungen angepaßt worden sind, werden die Räume $\mathrm{B}_{p,k}$ und $\mathrm{B}^{\omega,loc}_{p,k}$ definiert. Diese Räume bestehen aus Distributionen, deren Fouriertransformierten L_1^{loc}-Funktionen mit gewissen Integrabilitätsbedingungen sind. Im weiteren werden dann die Faltung und das Anwenden von $P(D)$ in diesen Räumen untersucht.

1. Gewichtsfunktionen k

Nach dem die (temperierten) Gewichtsfunktionen eingeführt sind, werden die wichtigsten Abschätzungen und Beispiele vorgeführt.

Definition 1.1. *Für jede Funktion $k : \mathbb{R}^N \to]0,\infty[$ und $K > 0$ definiere:*

$$M_{k,K}(x) := \sup_{y\in\mathbb{R}^N} \frac{k(x+y)}{k^K(y)}.$$

Definition 1.2. *Sei $\omega \in \mathcal{M}'$ beliebig gegeben. $\mathcal{K}_\omega$ sei die Menge aller stetigen Funktionen $k : \mathbb{R}^N \to [0,\infty[$, für die es C_1, C_2, K_1, $K_2 > 0$ gibt, so daß*

$$C_1 e^{-K_1\omega} \le k \le C_2 e^{K_2\omega} \qquad (\mathbf{M_0})$$

gilt.

Satz 1.3. (1) *Sei $k : \mathbb{R}^N \to]0,\infty[$ stetig. Wenn es λ, K_1, $K_2 > 0$ gibt, so daß für alle x, $y \in \mathbb{R}^N$*

$$k(x+y) \le \lambda e^{K_1\omega(x)} k^{K_2}(y) \qquad (\mathbf{M_1})$$

gilt, so ist $k \in \mathcal{K}_\omega$.

(2) *Sei $k : \mathbb{R}^N \to]0,\infty[$ beliebig. Wenn es λ, $K > 0$ gibt, so daß für alle x, $y \in \mathbb{R}^N$*

$$k(x+y) \le \lambda e^{K\omega(x)} k(y) \qquad (\mathbf{M_2})$$

gilt, so ist $\log k$ gleichmäßig stetig. Es gilt $k \in \mathcal{K}_\omega$, und $M_{k,1}$ erfüllt ebenfalls $(\mathbf{M_2})$.

Beweis. „(1)“: Aus $(\mathbf{M_1})$ folgt sofort $k(x) \le \lambda k(0)^{K_2} e^{K_1\omega(x)}$ (mit $y = 0$). Um die andere Abschätzung zu erhalten, setze $\tilde{x} := -x$ und $\tilde{y} := y + x$. Aus $(\mathbf{M_1})$ folgt dann: $k(y) = k(\tilde{x}+\tilde{y}) \le \lambda e^{K_1\omega(\tilde{x})} k^{K_2}(\tilde{y})$. Mit $y = 0$ ergibt sich: $k(x) \ge \sqrt[K_2]{\frac{k(0)}{\lambda}}\, e^{-\frac{K_2}{K_1}\omega(x)}$.

„(2)“: Da $(\mathbf{M_2})$ offenbar auch gültig bleibt, wenn ω durch eine äquivalente Gewichtsfunktion $\tilde{\omega}$ ersetzt wird, sei o.B.d.A. $\omega(0) = 0$. Aus dem in (1) Gezeigten folgt (wegen $K_2 = 1$):

$$-\log(\frac{1}{\lambda})K_2\omega(x) \leq \log(k(x+y)) - \log(k(y)) \leq \log(\lambda)K_2\omega(x).$$

Offenbar folgt damit, daß $\log k$ gleichmäßig stetig ist. Aus (1) folgt dann $k \in \mathcal{K}_\omega$. Da offenbar $M_{k,1}(x+y) \leq M_{k,1}(x)M_{k,1}(y) \leq \lambda e^{K\omega(x)}M_{k,1}(y)$ gilt, erfüllt $M_{k,1}$ ebenfalls $(\mathbf{M_2})$. $M_{k,1} \in \mathcal{K}_\omega$ folgt daher aus dem bereits Gezeigten.

Bemerkung 1.4. Sei $\omega \in \mathcal{M}'$. Dann gilt:

(1) Zu $(\mathbf{M_1})$ ist äquivalent: Es gibt K_1, K_2, $\lambda > 0$ so, daß für jedes $x \in \mathbb{R}^N$

$$M_{k,K_1}(x) \leq \lambda e^{K_2\omega(x)}$$

gilt.
(2) Für jedes $\omega \in \mathcal{M}'$ und jedes $\lambda \in \mathbb{R}$ erfüllt $e^{\lambda\omega}$ offensichtlich $(\mathbf{M_1})$. Falls ω subadditiv ist ((α) gilt), erfüllt $e^{\lambda\omega}$ sogar $(\mathbf{M_2})$.
(3) Für $\omega \in \mathcal{M}'$, $k \in \mathcal{K}_\omega$ die $(\mathbf{M_2})$ erfüllen ist dann $M_{k,1} =: M_k$ wie in Hörmander [**H2**] oder Björck [**Bj**] definiert.

Satz 1.5. *Sei $\omega \in \mathcal{M}'$. Für beliebige $k, k_1, k_2 \in \mathcal{K}_\omega$ und $s \in \mathbb{R}$ sind $k_1 + k_2$,k_1k_2, $\max(k_1, k_2)$, $\min(k_1, k_2)$ und $k^s \in \mathcal{K}_\omega$.*

Beweis. Seien $K_{i,1}$, $K_{i,2}$, $C_{i,1}$ und $C_{i,2}$ $(i = 1, 2)$ gemäß $(\mathbf{M_0})$ gewählt. Dann gilt:

$$\min_{i=1,2} C_{i,1}e^{-\max_{i=1,2} K_{i,1}\,\omega} \leq C_{1,1}e^{K_{1,1}\omega} + C_{2,1}e^{K_{2,1}\omega}$$
$$\leq k_1 + k_2 \leq C_{1,2}e^{K_{1,2}\omega} + C_{2,2}e^{K_{2,2}\omega} \leq 2\max_{i=1,2} C_{i,2}e^{\max_{i=1,2} K_{i,2}\,\omega}.$$

Für k_1k_2 folgt sofort:

$$C_{1,1}C_{2,1}e^{-(K_{1,1}+K_{2,1})\omega} \leq k_1k_2 \leq C_{1,2}C_{2,2}e^{(K_{1,2}+K_{2,2})\omega}.$$

Das Maximum läßt sich folgendermaßen abschätzen:

$$C_{1,1}e^{-K_{1,1}\omega} \leq k_1 \leq \max(k_1, k_2) \leq k_1 + k_2 \leq 2\max_{i=1,2}(C_{i,2}e^{\max_{i=1,2} K_{i,2}\omega}.$$

Analog folgt für das Minimum von k_1 und k_2:

$$\min_{i=1,2} C_{i,1}e^{-\max_{i=1,2} K_{i,1}\omega} \leq \min_{i=1,2}\left(C_{i,1}e^{-K_{i,1}\omega}\right) \leq \min(k_1, k_2) \leq k_1 \leq C_{1,2}e^{K_{1,2}\omega}.$$

Für $s \geq 0$ folgt $k^s \in \mathcal{K}_\omega$ unmittelbar aus der Monotonie der Funktion $x \mapsto x^s$. Für $s < 0$ gilt die Behauptung analog, da die Abschätzungen von $(\mathbf{M_0})$ symmetrisch sind.

Satz 1.5 gilt analog, wenn alle k_i $(\mathbf{M_2})$ erfüllen (siehe Björck [**Bj**] Theorem 2.1.4), d.h. k_1k_2, $k_1 + k_2$, k^s erfüllen dann auch $(\mathbf{M_2})$.

Definition 1.6. *Für jedes Polynom $P \in\ [z]$ definiere*

$$\tilde{P}^2(x) := \sum_{\alpha\in\mathbb{N}_0^N} |D^\alpha P(x)|^2.$$

LEMMA 1.7. Für jedes $\omega \in \mathcal{M}'$ und jedes $0 \not\equiv P \in [z]$ gilt:

$$\tilde{P} \in \mathcal{K}_\omega \text{ und } \tilde{P} \text{ erfüllt } (\mathbf{M_2}).$$

BEWEIS. Offensichtlich ist $\tilde{P}$ positiv, es gilt sogar

$$\{x \in \mathbb{R}^N \mid \tilde{P}(x) = 0\} \neq \emptyset \Leftrightarrow P \equiv 0.$$

$\tilde{P}$ ist als endliche Summe stetiger Funktionen auch stetig. Mit $m := \deg(P)$ gilt:

$$\begin{aligned}
\tilde{P}^2(x+y) = \sum_{\alpha\in\mathbb{N}_0^N} |D^\alpha P(x+y)|^2 &= \sum_{|\alpha|\le m} |D^\alpha P(x+y)|^2 \overset{\text{Taylor}}{=} \sum_{|\alpha|\le m} |\sum_{|\alpha+\beta|\le m} D^{\alpha+\beta} P(x) \frac{y^\beta}{\beta!}|^2 \\
&= \sum_{\alpha\le m} |\sum_{|\alpha+\beta|\le m} (D^{\alpha+\beta}P(x)\frac{y^\beta}{\beta!})^2 + \sum_{\beta_1\neq\beta_2} D^{\alpha+\beta_1}P(x) D^{\alpha+\beta_2}P(x) \frac{y^{\beta_1+\beta_2}}{\beta_1!\beta_2!}| \\
&\overset{xy\le x^2+y^2}{\le} \sum_{|\alpha|\le m} |\sum_{|\alpha+\beta|\le m} (D^{\alpha+\beta}P(x)\frac{y^\beta}{\beta!})^2 \\
&\qquad + \sum_{|\alpha+\beta_1|\le m} (D^{\alpha+\beta_1}P(x)\frac{y^{\beta_1}}{\beta_1!})^2 + \sum_{|\alpha+\beta_2|\le m} (D^{\alpha+\beta_2}P(x)\frac{y^{\beta_2}}{\beta_2!})^2| \\
&\overset{\triangle\text{-Ungleichung}}{\le} \sum_{|\alpha|\le m} \sum_{|\alpha+\beta|\le m} |D^{\alpha+\beta}P(x)|^2 3(\frac{y^\beta}{\beta!})^2 = \sum_{|\beta|\le m} \left(\sum_{|\alpha|\le m-|\beta|} |D^{\alpha+\beta}P(x)|^2 \right) 3(\frac{y^\beta}{\beta!})^2 \\
&= \sum_{|\gamma|\le m} |D^\gamma P(x)|^2 \sum_{\substack{|\alpha|\le m\\ \alpha\le\gamma}} 3(\frac{y^{\gamma-\alpha}}{\alpha!})^2 = \tilde{C}\tilde{P}(x)^2 \sum_{|\alpha|\le m} \frac{y^{2\alpha}}{\beta!^2} \\
&\le C\tilde{P}(x)^2(1+|y|)^{2m} \overset{(\gamma)}{\le} C\tilde{P}(x)^2 e^{2\omega(y)}
\end{aligned}$$

BEMERKUNG 1.8. Für $\tilde{P}e^{\lambda\omega}$ ($\lambda \ge 0$, $\omega \in \mathcal{M}'$) gilt $(\mathbf{M_1})$ immer.

BEWEIS. Sei $\alpha \in \mathbb{N}_0^N$ mit $|\alpha| = \deg P$ und $a_\alpha \neq 0$. Aus der Definition von $\tilde{P}$ ergibt sich $\frac{\tilde{P}}{a_\alpha\alpha!} \ge 1$. Mit K aus (α') gilt daher: $(\tilde{P})^K = (\frac{\tilde{P}}{a_\alpha\alpha!})^K (a_\alpha\alpha!)^K \ge \frac{\tilde{P}}{a_\alpha\alpha!}(a_\alpha\alpha!)^K$. Damit folgt dann:

$$\begin{aligned}
e^{\lambda\omega(x+y)}\tilde{P}(x+y) &\le Ce^{\lambda K\omega(x)} e^{\lambda K\omega(y)} \tilde{P}(y) \\
&\le C(|a_\alpha\alpha!|)^{1-K} e^{\lambda K\omega(x)} (e^{\lambda\omega(y)}\tilde{P}(y))^K
\end{aligned}$$

DEFINITION 1.9. *Setze*

$$\mathcal{K}_\mathcal{M} := \bigcup_{\omega\in\mathcal{M}'} \mathcal{K}_\omega\,.$$

2. Die Räume $\mathrm{B}_{p,k}$

Nachdem die Banachräume $\mathrm{B}_{p,k}$ eingeführt worden sind, wird ihr Verhalten unter Faltung, Multiplikation mit Testfunktionen und dem Anwenden von Differentialoperatoren untersucht.

DEFINITION 2.1. *Sei $\omega \in \mathcal{M}'$, $k \in \mathcal{K}_\omega$ und $1 \leq p \leq \infty$. Für $u \in \mathcal{F}_\omega$ setze:*

$$\|u\|_{p,k} := \|\hat{u}k\|_{L_p}.$$

Ferner definiere:

$$\mathrm{B}^\omega_{p,k} := \{u \in \mathcal{F}_\omega \mid \|u\|_{p,k} < \infty\}.$$

LEMMA 2.2. Unter den Voraussetzungen von 2.1 gilt:

$$\mathrm{B}^\omega_{p,k} = \{u \in \mathcal{S}'_\omega \mid \hat{u} \in L_1^{loc} \text{ und } \|u\|_{p,k} < \infty\}.$$

BEWEIS. Für $\hat{u} \in L_1^{loc}$ gilt mit K_1, C_1 wie in $(\mathbf{M_0})$, γ aus (γ') und $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$:

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^N} |\hat{u}|e^{-(K_1+\gamma)\omega}\, dx &\overset{\text{Hölder}}{\leq} \|\hat{u}e^{-K_1\omega}\|_{L_p}\, \|e^{-\gamma\omega}\|_{L_{p'}} \\ &\leq \frac{1}{C_1}\|\hat{u}k\|_{L_p}\, \|e^{-\gamma\omega}\|_{L_{p'}} =: C\|u\|_{p,k}.\end{aligned}$$

Daraus folgt dann $u \in \mathcal{F}_\omega$.

SATZ 2.3. *Sei*
omega $\in \mathcal{M}'$ und $k \in \mathcal{K}_\omega$. Dann ist $(\mathrm{B}^\omega_{p,k}, \|.\|_{p,k})$ ein Banachraum. Es gilt

$$\mathcal{S}_\omega \subseteq \mathrm{B}^\omega_{p,k} \subseteq \mathcal{S}'_\omega$$

mit stetigen Einbettungen. Für $p < \infty$ ist $\mathcal{D}_{(\omega)}$ dicht in $\mathrm{B}^\omega_{p,k}$.

BEWEIS. Seien C_1, C_2, K_1 und K_2 gemäß $(\mathbf{M_0})$ zu k gewählt. Dann gilt (mit stetigen Einbettungen):

$$\mathcal{S}_\omega \subseteq L_{p,k} \subseteq \mathcal{S}'_\omega\,.$$

Denn: Sei $f \in \mathcal{S}_\omega$ beliebig. Dann gilt

$$\begin{aligned}\|fk\|_{L_p} &\leq C_2\|fe^{K_2\omega}\|_{L_p} = C_2\|fe^{(K_2+\gamma)\omega}e^{-\gamma\omega}\|_{L_p} \\ &\leq C_2\|fe^{(K_2+\gamma)\omega}\|_{L_\infty}\, \|e^{-\gamma\omega}\|_{L_p} = C_2 p_{0,K_2+\gamma}(f)\, \|e^{-\gamma\omega}\|_{L_p} < \infty.\end{aligned}$$

Sei $f \in L_{p,k}, g \in \mathcal{S}_\omega$ beliebig. Dann gilt:

$$\begin{aligned}|\langle f, g\rangle| &= |\int_{\mathbb{R}^N} fg\, dx| \leq \frac{1}{C_1}\int_{\mathbb{R}^N} |fg|ke^{K_1\omega}\, dx \\ &\overset{\text{Hölder}}{\leq} \frac{1}{C_1}\|fk\|_{L_p}\, \|ge^{K_1\omega}\|_{L_{p'}}.\end{aligned}$$

Mit γ aus (γ') erhält man:

$$\begin{aligned}&= \frac{1}{C_1}\|fk\|_{L_p}\, \|ge^{(K_1+\gamma-\gamma)\omega}\|_{L_{p'}} \leq \frac{1}{C_1}\|fk\|_{L_p}\, \|ge^{(K_1+\gamma)\omega}\|_\infty\, \|e^{-\gamma\omega}\|_{L'_p} \\ &= \frac{1}{C_1}\|fk\|_{L_p}\, p_{0,K_1+\gamma}(g)\, \|e^{-\gamma\omega}\|_{L'_p} < \infty.\end{aligned}$$

Da die Fouriertransformation nach I.6.2 und I.6.7 ein Automorphismus von $\mathcal{S}_\omega$ und $\mathcal{S}'_\omega$ und ein Isomorphismus von $L_{p,k}$ nach $\mathrm{B}^\omega_{p,k}$ ist, folgen die behaupteten Einbettungen und die Vollständigkeit von $B^\omega_{p,k}$. Die Dichtheitsaussage folgt ebenfalls, da $\mathcal{S}_\omega$ in $L_{p,k}$ (für $p < \infty$) und $\mathcal{D}_{(\omega)}$ in $\mathcal{S}_\omega$ nach Satz I.6.5 dicht ist.

Bemerkung 2.4. Die Fouriertransformation ist ein isometrischer Isomorphismus zwischen $L_{p,k}$ und $\mathrm{B}^{\omega}_{p,k}$.

Beweis. Da $L_{p,k}$ und $\mathrm{B}^{\omega}_{p,k}$ in $\mathcal{S}'_{\omega}$ enthalten sind und dort nach I.6.2 und I.6.7 die Inversionsformel gilt, folgt die Behauptung.

Satz 2.5. *Sei $\omega_r \in \mathcal{M}'$ $(r = 1, 2)$ mit $\omega_2 \prec \omega_1$ und $k \in \mathcal{K}_{\omega_1} \cap \mathcal{K}_{\omega_2}$. Dann ist die Einbettung $i : \mathcal{D}'_{\omega_2} \to \mathcal{D}'_{\omega_1}$ stetig. Die Einschränkung von i auf $\mathrm{B}^{\omega_2}_{p,k}$ ist eine Isometrie auf $\mathrm{B}^{\omega_1}_{p,k}$.*

Beweis. Da die Norm $\|.\|_{p,k}$ nicht von ω abhängt, bleibt nach Lemma I.5.6 nur die Surjektivität der Einschränkung zu zeigen. Sei dazu $u \in \mathrm{B}^{\omega_1}_{p,k}$ beliebig. Dann ist $\hat{u} \in L_{p,k}$ und deswegen $u = (2\pi)^N \hat{\hat{\check{u}}} \in \mathrm{B}^{\omega_2}_{p,k}$.

Sei $k \in \mathcal{K}_{\omega_1} \cap \mathcal{K}_{\omega_2}$. Dann gilt auch

$$k \in \mathcal{K}_{\max(\omega_1,\omega_2)} \quad \text{und} \quad \omega_i \prec \max(\omega_1, \omega_2) \quad i = 1, 2.$$

Nach Satz 2.5 gilt daher

$$\mathrm{B}^{\omega_1}_{p,k} \sim \mathrm{B}^{\omega_2}_{p,k}$$

d.h. $\mathrm{B}^{\omega}_{p,k}$ ist von ω unabhängig, solange $k \in \mathcal{K}_{\omega}$ gilt.

Definition 2.6. *Sei $\omega \in \mathcal{M}'$, $k \in \mathcal{K}_{\omega}$ und $1 \le p \le \infty$. Man identifiziert alle $\mathrm{B}^{\omega}_{p,k}$ für die $k \in \mathcal{K}_{\omega}$ ist. Das Ergebnis nennt man $\mathrm{B}_{p,k}$.*

Setze für $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ offen

$$\mathrm{B}^{\omega,c}_{p,k}(\Omega) := \mathrm{B}_{p,k} \cap \mathcal{E}'_{(\omega)}(\Omega).$$

Da $\mathrm{B}_{p,k} \subseteq \mathcal{D}'_{(\omega_1)} \cap \mathcal{D}'_{(\omega_2)}$ für $k \in \mathcal{K}_{\omega_1} \cap \mathcal{K}_{\omega_2}$ gilt, folgt $\mathrm{B}^{\omega_1,c}_{p,k} = \mathrm{B}^{\omega_2,c}_{p,k} =: \mathrm{B}^{c}_{p,k}$ aus Bemerkung I.4.2.

Satz 2.7. *Für jedes $k \in \mathcal{K}_{\mathcal{M}}$ ist $(\mathrm{B}_{p,k}, \|.\|_{p,k})$ ein Banachraum. Für jedes $\omega \in \mathcal{M}'$ mit $k \in \mathcal{K}_{\omega}$ gilt:*

$$\mathcal{D}_{(\omega)} \subset \mathcal{S}_{\omega} \subseteq \mathrm{B}_{p,k} \subseteq \mathcal{S}'_{\omega} \subset \mathcal{D}'_{(\omega)}$$

mit stetigen Einbettungen. Für $p < \infty$ ist $\mathcal{D}_{(\omega)}$ dicht in $\mathrm{B}_{p,k}$.

Satz 2.8. *Sei $\omega \in \mathcal{M}'$, $k \in \mathcal{K}_{\omega}$ sowie $1 \le p \le \infty$ beliebig. Dann gilt:*

$$P(D)(\mathrm{B}_{p,k}) \subseteq \mathrm{B}_{p,k/\tilde{P}}\,.$$

Beweis. Mit Satz 1.5 und Lemma 1.7 gilt: $\frac{k}{\tilde{P}} \in \mathcal{K}_{\omega}$. Wegen

$$\tilde{P}^2(x) = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}_0^N} |D^{\alpha} P(x)|^2 \ge |P(x)|^2 \tag{2-1}$$

gilt:

$$\begin{aligned} \|\, P(D)\, u\|^p_{p,k/\tilde{P}} &= \int_{\mathbb{R}^N} |(\widehat{P(D)\, u})\frac{k}{\tilde{P}}|^p\, dx = \int_{\mathbb{R}^N} |P\hat{u}\frac{k}{\tilde{P}}|^p\, dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^N} |\frac{P}{\tilde{P}}\hat{u}k|^p\, dx \overset{(2\text{-}1)}{\le} \int_{\mathbb{R}^N} |\hat{u}k|^p\, dx = \|u\|^p_{p,k} < \infty. \end{aligned}$$

SATZ 2.9. *Sei $\omega \in \mathcal{M}'$, $k \in \mathcal{K}_\omega$ so, daß $(\mathbf{M_1})$ gilt. Dann gilt für $u \in \mathrm{B}^\omega_{p,k^{K_1}}$ und $f \in \mathcal{S}_\omega$*

$$fu \in \mathrm{B}^\omega_{p,k} \text{ und } \|fu\|_{p,k} \leq C\|\hat{f}M_{k,K_1}\|_{L_1}\,\|u\|_{p,k^{K_1}}.$$

BEWEIS. Nach Satz I.6.11 gilt (wegen $\mathrm{B}^\omega_{p,k} \subseteq \mathcal{F}_\omega$):

$$\widehat{fu}(x) = (2\pi)^{-N}\hat{f} * \hat{u}(x) = (2\pi)^{-N}\int_{\mathbb{R}^N}\hat{f}(x-y)\hat{u}(y)\,dy.$$

Aus der Definition 1.1 folgt:

$$k(x) \leq M_{k,K_1}(x-y)k^{K_1}(y).$$

Damit gilt dann

$$\begin{aligned}
\|fu\|_{p,k} &= \|\widehat{fu}k\|_{L_p} \leq (2\pi)^{-N}\|\int_{\mathbb{R}^N}(\hat{f}M_{k,K_1})(x-y)(\hat{u}k^{K_1})(y)\,dy\|_{L_p}\\
&= (2\pi)^{-N}\|(\hat{f}M_{k,K_1}) * (\hat{u}k^{K_1})\|_{L_p} \leq (2\pi)^{-N}\|\hat{f}M_{k,K_1}\|_{L_1}\,\|\hat{u}k^{K_1}\|_{L_p}\\
&= (2\pi)^{-N}\|\hat{f}M_{k,K_1}\|_{L_1}\,\|u\|_{p,k^{K_1}}.
\end{aligned}$$

Aus $(\mathbf{M_1})$ folgt $M_{k,K_1} \leq \lambda e^{K_2\omega}$. Damit kann weiter abgeschätzt werden:

$$\leq (2\pi)^{-N}\lambda\|f\|_{K_2}\,\|u\|_{p,k^{K_1}} < \infty.$$

Im allgemeinen gilt für $u \in \mathrm{B}_{p,k}$ und $f \in \mathcal{D}_{(\omega)}$ nicht $uf \in \mathrm{B}_{p,k}$ wie später gezeigt wird. Es gilt jedoch das Folgende:

BEMERKUNG 2.10. Sei $\omega \in \mathcal{M}'$, $k \in \mathcal{K}_\omega$ und $1 \leq p \leq \infty$. Dann gilt:

(1) Für $u \in \mathrm{B}^{\omega,c}_{p,k}$ gilt $\mathcal{D}_{(\omega)}\,u \subseteq \mathrm{B}_{p,k}$ genau dann, wenn es C_u und $\lambda > 0$ gibt, so daß $\|\hat{u}(.-x)k\|_{L_p} \leq C_u e^{\lambda\omega(x)}$ für jedes $x \in \mathbb{R}^N$ gilt.
(2) Für jedes ω und k für die $(\mathbf{M_2})$ gilt, ist (1) immer erfüllt.

BEWEIS. „(1):⇒" Fixiere $K \quad \mathbb{R}^N$ mit $\operatorname{supp} u \subseteq \mathring{K}$. Der Graph der Abbildung: $\mathcal{D}_{(\omega)}(K) \to \mathrm{B}_{p,k} : \phi \mapsto \phi u$ ist abgeschlossenen, da für $\phi_n \to 0$ in $\mathcal{D}_{(\omega)}(K)$ und $u\phi_n \to v$ in $\mathrm{B}_{p,k}$

$$\langle v, \psi\rangle = \lim_{n\to\infty}\langle u\phi_n, \psi\rangle = \lim_{n\to\infty}\langle u, \psi\phi_n\rangle = u(0) = 0$$

gilt (für jedes $\psi \in \mathcal{D}_{(\omega)}$), was $v = 0$ impliziert. Da $\mathcal{D}_{(\omega)}(K)$ ein (nuklearer)- Fréchetraum ([**BMT**] 3.6.(2)) und $\mathrm{B}_{p,k}$ ein Banachraum ist, ist die Abbildung nach dem „Satz vom abgeschlossenen Graphen" stetig. Es existieren daher $C = C_u > 0$ und $\lambda > 0$, so daß für jedes $\phi \in \mathcal{D}_{(\omega)}(K)$

$$\|\phi u\|_{p,k} \leq C\|\phi\|_\lambda$$

gilt. Für jedes $f \in \mathcal{S}_\omega$, $\phi \in \mathcal{D}_{(\omega)}(K)$ und $\lambda > 0$ gilt:

$$\|f\phi\|_\lambda = \|f\phi\|_{1,\exp(\lambda\omega)}.$$

Da nach 2.7 $f \in \mathrm{B}_{p,\tilde{k}^K}$ für jedes $\tilde{k} \in \mathcal{K}_\omega$ gilt, erhält man für $\tilde{k} := e^{\frac{\lambda}{K}\omega}$ aus 2.9 mit einem $K > 0$:

$$\leq C\|f\|_{1,\exp(\lambda\omega)}\,\|\phi\|_K = C\|f\|_\lambda\,\|\phi\|_K.$$

Wähle $\phi \in \mathcal{D}_{(\omega)}(K)$ mit $\phi \equiv 1$ auf einer Umgebung von $\operatorname{supp} u$. Dann ist die Abbildung

$$\mathcal{S}_\omega \to \mathrm{B}_{p,k} : f \mapsto f\phi u = fu$$

nach dem oben Gezeigten stetig, und es gilt:

$$\|fu\|_{p,k} = \|f\phi u\|_{p,k} \leq C_u \|\phi f\|_\lambda \leq C_u \|f\|_\lambda \, \|\phi\|_K .$$

Sei nun ϕ_ε wie in I.5.5. Nach I.6.2 und I.6.4 ist $\hat{\phi}_\varepsilon \in \mathcal{S}_\omega$. Daher gilt auch $\widehat{\phi_\varepsilon * \delta_{-x}} \in \mathcal{S}_\omega$. Aus der Konstruktion der ϕ_ε folgt daher für jedes $x \in \mathbb{R}^N$:

$$\begin{aligned} \|\widehat{\phi_\varepsilon * \delta_{-x}} u\|_{p,k} &= (2\pi)^N \|(\check{\phi}_\varepsilon * \check{\delta}_{-x} * \hat{u})k\|_{L_p} \\ &= (2\pi)^N \|\check{\phi}_\varepsilon * \hat{u}(.-x)k\|_{L_p} \to (2\pi)^N \|\hat{u}(.-x)k\|_{L_p} . \end{aligned}$$

Analog zeigt man:

$$\|\widehat{\phi_\varepsilon * \delta_{-x}}\|_\lambda \to (2\pi)^N e^{\lambda\omega(x)} .$$

Damit folgt die Behauptung.

„(1) :⇐“ Sei $u \in \mathrm{B}^{\omega,c}_{p,k}$ mit der geforderten Abschätzung gegeben. Für jedes $\phi \in \mathcal{D}_{(\omega)}$ gilt dann:

$$\begin{aligned} \|\phi u\|_{p,k} &= \|(\hat{\phi} * \hat{u})k\|_{L_p} = \| \int_{\mathbb{R}^N} \hat{\phi}(t)\hat{u}(x-t)\, dt\, k(x)\|_{L_p,x} \\ &\leq \int_{\mathbb{R}^N} \|\hat{\phi}(t)\hat{u}(x-t)k(x)\|_{L_p,x}\, dt \leq \int_{\mathbb{R}^N} |\hat{\phi}|(t) e^{\lambda\omega(t)}\, dt = \|\phi\|_\lambda < \infty . \end{aligned}$$

„(2):“ Aus $(\mathbf{M_2})$ folgt (mit $K = 1$!):

$$\begin{aligned} \|\hat{u}(x-t)k(t)\|_{L_p,t} &= \|\hat{u}(t)k(x-t)\|_{L_p,t} \\ &\overset{(\mathbf{M_2})}{\leq} \lambda \|\hat{u}(t)k^K(t)e^{K\omega(x)}\|_{L_p,t} \\ &= \lambda \|u\|_{p,k} e^{\omega(x)} =: C_u e^{K\omega(x)} . \end{aligned}$$

Satz 2.11. *Sei $\omega \in \mathcal{M}'$ sowie $k_1,\ k_2 \in \mathcal{K}_\omega$ beliebig. Wenn $u_1 \in \mathrm{B}^{\omega,c}_{p,k_1}$ und $u_2 \in \mathrm{B}_{\infty,k_2}$ ist, dann gilt:*

$$u_1 * u_2 \in \mathrm{B}_{p,k_1k_2} \text{ und } \|u_1 * u_2\|_{p,k_1k_2} \leq \|u_1\|_{p,k_1}\, \|u_2\|_{\infty,k_2} .$$

Analog gilt die Aussage auch für $u_1 \in \mathrm{B}_{p,k_1}$ und $u_2 \in \mathrm{B}^{\omega,c}_{\infty,k_2}$.

Beweis.

$$\|u_1 * u_2\|_{p,k_1k_2} = \|\hat{u}_1 k_1 \hat{u}_2 k_2\|_p \leq \|\hat{u}_1 k_1\|_p\, \|\hat{u}_2 k_2\|_\infty = \|u_1\|_{p,k_1}\, \|u_2\|_{\infty,k_2}$$

Die Aussage des letzten Satzes ist in gewisser Weise „scharf“, d.h. im Allgemeinen können die Voraussetzungen nicht abgeschwächt werden:

Bemerkung 2.12. Sei $\omega \in \mathcal{M}'$, $k_1,\ k_2 \in \mathcal{K}_\omega$ sowie $\mu \in \mathcal{E}'_{(\omega)}$. Dann gilt:

$$\mu * \mathrm{B}_{\infty,k_2} \subseteq \mathrm{B}_{\infty,k_1k_2} \iff \mu \in \mathrm{B}^{\omega,c}_{\infty,k_1} .$$

Beweis. „⇐“: folgt direkt aus Satz 2.11.

„⇒“: Angenommen:

$$\mu \notin \mathrm{B}^{\omega,c}_{\infty,k_1},$$

dann existiert eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathbb{R}^N$ mit

$$|\hat{\mu}k_1|(x_n) \geq n^3. \tag{2-2}$$

Sei $n \in \mathbb{N}$ beliebig. Da k_2 stetig ist, gibt es ein $\delta > 0$ mit

$$\forall x \in B_\delta(x_n) \;:\; |k_2(x) - k_2(x_n)| \leq \min(1, k_2(x_n)).$$

Wegen $|\frac{k_2(x)}{k_2(x_n)}| \leq \frac{|k_2(x)-k_2(x_n)|}{k_2(x_n)} + \frac{k_2(x_n)}{k_2(x_n)}$ gilt:

$$\forall x \in B_\delta \;:\; \frac{k_2(x)}{k_2(x_n)} \leq 2. \tag{2-3}$$

Wähle $\varphi \in \mathcal{D}_{(\omega)}(B_\delta)$ mit $0 \leq \varphi \leq 1$ und $\varphi(x_n) = 1$. Setze

$$u_n := \frac{(2\pi)^N \hat{\check{\varphi}}}{k_2(x_n)} \in \mathcal{S}_\omega \overset{2.3}{\subseteq} \mathrm{B}_{\infty,k}\,.$$

Dann gelten:

$$\hat{u}_n(x_n) = \frac{\varphi}{k_2}(x_n) = \frac{1}{k_2(x_n)}, \tag{2-4}$$

$$(\hat{u}_n k)(x) \leq \chi_{\mathrm{B}_\delta}\frac{k(x)}{k_n(x_n)} \overset{(2\text{-}3)}{\leq} 2 \tag{2-5}$$

$$\Rightarrow \|u_n\|_{\infty,k_2} \leq 2.$$

Wegen (2-5) ist

$$u := \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{n^2} u_n \in \mathrm{B}_{\infty,k_2}$$

wohldefiniert, und für alle $m \in \mathbb{N}$ gilt:

$$\hat{u}(x_m) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{n^2}\hat{u}(x_m) \overset{(2\text{-}4)}{\geq} \frac{1}{m^2 k_2(x_m)}.$$

Aus (2-2) folgt dann

$$|\hat{\mu}\hat{u}k_1k_2|(x_m) = |\hat{\mu}k_1\,\hat{u}k_2|(x_m) \geq m$$

und damit

$$\mu * u \notin \mathrm{B}_{\infty,k_1k_2}\,.$$

Satz 2.13. *Sei $\omega \in \mathcal{M}'$, $k \in \mathcal{K}_\omega$, $1 \leq p < \infty$ und $p' \in \mathbb{R}$ mit $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$. Für jedes $L \in \mathrm{B}'_{p,k}$ existiert dann ein $v \in \mathrm{B}_{p',\frac{1}{k}}$ mit*

$$\forall u \in \mathcal{S}_\omega \;:\; L(u) = \check{v}(u)$$

und

$$\|L\|_{\mathrm{B}'_{p,k}} = \|\check{v}\|_{\mathrm{B}_{p',\frac{1}{k}}}\,.$$

BEWEIS. Sei $L \in \mathrm{B}'_{p,k}$ beliebig gegeben. Definiere

$$\phi : L_{p,k} \to \;\; : f \mapsto L(\hat{f}).$$

Da L stetig ist, existiert ein $C > 0$ mit

$$\forall u \in \mathrm{B}_{p,k} \;:\; |L(u)| \leq C\|u\|_{p,k} = C\|\hat{u}k\|_{L_p}.$$

Deswegen gilt:

$$|\phi(f)| = |L(\hat{f})| \leq \tilde{C}\|\check{f}k\|_{L_p}$$

d.h. $\phi \in L'_{p,k}$. Daraus folgt nun, daß ein $\tilde{v} \in L_{p',\frac{1}{k}}$ mit

$$\forall f \in L_{p,k} \;:\; \phi(f) = \tilde{v}(f)$$

existiert. Definiere $v := (2\pi)^{-N}\hat{v}$. Damit gilt dann

$$L(u) = (2\pi)^{-N}L(\hat{\check{\hat{u}}}) = (2\pi)^{-N}\phi(\hat{\check{u}}) = \tilde{v}(\hat{\check{u}}) = \check{\tilde{v}}(u).$$

Andererseits definiert jedes $v \in \mathrm{B}_{p',\frac{1}{k}}$ eine stetige Linearform auf $\mathrm{B}_{p,k}$, da

$$|v(u)| := |\hat{v}(\hat{\check{u}})| \leq \|\hat{\check{v}}\|_{L_{p',\frac{1}{k}}} \|\hat{u}\|_{L_{p,k}} = C\|u\|_{p,k}$$

wegen der L_p-$L_{p'}$-Dualität gilt.

3. Die Räume $\mathrm{B}_{p,k}^{\omega,loc}$

Hier werden die zu $\mathrm{B}_{p,k}$ gehörigen „lokalen Räume" untersucht. Problematisch, im Gegensatz zu dem „klassischen Fall" von Hörmander oder Björck, sind die $k \in \mathcal{K}_\omega$ die nicht $(\mathbf{M_2})$ erfüllen, da, wie in 3.13 gezeigt wird, die Räume $\mathrm{B}_{p,k}$ im allgemeinen dann nicht semi-lokal sind (d.h. $\mathcal{D}_{(\omega)}\,\mathrm{B}_{p,k} \nsubseteq \mathrm{B}_{p,k}$). Aus diesem Grunde ist auch unbekannt, ob die lokalen Räume Fréchet-Räume sind und ob der „Satz vom abgeschlossenen Graphen" gilt.

DEFINITION 3.1. *Für $\omega \in \mathcal{M}'$, $k \in \mathcal{K}_\omega$ und $1 \leq p \leq \infty$ definiere*

$$\mathrm{B}_{p,k}^{\omega,loc}(\Omega) := \{u \in \mathcal{D}'_{(\omega)}(\Omega) \mid \forall \varphi \in \mathcal{D}_{(\omega)}(\Omega) : u\varphi \in \mathrm{B}_{p,k}^{\omega}\}$$

mit der Topologie, die durch das Halbnormensystem

$$(u \mapsto \|\varphi u\|_{p,k})_{\varphi \in \mathcal{D}_{(\omega)}(\Omega)}$$

gegeben wird.

LEMMA 3.2. Sei $\omega \in \mathcal{M}'$, $k \in \mathcal{K}_\omega$ sowie $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ offen beliebig gegeben. Dann ist die Inklusionsabbildung

$$\mathrm{B}_{p,k}^{\omega,loc}(\Omega) \to \mathcal{D}'_{(\omega)}(\Omega)$$

stetig. Ferner ist $\mathrm{B}_{p,k}^{\omega,loc}$ folgenvollständig.

BEWEIS. Seien $u \in \mathrm{B}_{p,k}^{\omega,loc}(\Omega)$ und $\phi \in \mathcal{D}_{(\omega)}$ beliebig. Wähle $\psi \in \mathcal{D}_{(\omega)}(\Omega)$ mit $\psi \equiv 1$ auf einer Umgebung von $\operatorname{supp}\phi$. Dann gilt für p' mit $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$:

$$\begin{aligned} |u(\phi)| &= |\langle u, \phi\rangle| = |\langle \psi u, \phi\rangle| = |(2\pi)^{-N}\langle \widehat{\psi u}, \hat{\check{\phi}}\rangle| \\ &= (2\pi)^{-N}|\int_{\mathbb{R}^N} \widehat{\psi u}\hat{\check{\phi}}\,dx| \leq (2\pi)^{-N}\int_{\mathbb{R}^N} |\widehat{\psi u}k\hat{\check{\phi}}\frac{1}{k}|\,dx \overset{\text{Hölder}}{\leq} (2\pi)^{-N}\|\psi u\|_{p,k}\,\|\phi\|_{p',1/k} \end{aligned}$$

Wegen $\mathcal{D}_{(\omega)} \subseteq \mathrm{B}_{p,k}$ ist damit die erste Behauptung gezeigt.

Sei $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge in $\mathrm{B}^{\omega,loc}_{p,k}$. Nach Definition 3.1 ist dann für jedes $\phi \in \mathcal{D}_{(\omega)}(\Omega)$ $(\phi u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge in $\mathrm{B}_{p,k}$. Da die Räume $\mathrm{B}_{p,k}$ vollständig sind, gibt es $u^{(\phi)} \in \mathrm{B}_{p,k}$ mit

$$\phi u_n \to u^{(\phi)} \text{ in } \mathrm{B}_{p,k}.$$

Aufgrund des oben Gezeigten ist $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ auch in $\mathcal{D}'_{(\omega)}$ eine Cauchy-Folge. Daher gibt es ein $u \in \mathcal{D}'_{(\omega)}(\Omega)$ mit

$$u_n \to u \text{ in } \mathcal{D}'_{(\omega)}(\Omega).$$

Da die Multiplikation in $\mathcal{D}'_{(\omega)}$ stetig ist, gilt daher für jedes $\phi \in \mathcal{D}_{(\omega)}(\Omega)$

$$\phi u_n \to \phi u \text{ in } \mathcal{D}'_{(\omega)}.$$

Weil alle auftretenden (Ultra-)Distributionen kompakte Träger haben, folgt aus der Injektivität der Fouriertransformation $\phi u = u^{(\phi)} \in \mathrm{B}_{p,k}$. Damit ist die Folgenvollständigkeit ebenfalls gezeigt.

Satz 3.3. *Seien $\omega \in \mathcal{M}'$ und $k \in \mathcal{K}_\omega$ beliebig. Dann sind die folgenden Inklusionen stetig:*

$$\mathcal{E}_{(\omega)}(\Omega) \subseteq \mathrm{B}^{\omega,loc}_{p,k}(\Omega) \subseteq \mathcal{D}'_{(\omega)}(\Omega).$$

Wenn ω, k $(\mathbf{M_2})$ erfüllen ist der Raum $\mathrm{B}^{\omega,loc}_{p,k}(\Omega)$ ein Fréchetraum.

Beweis. Die Stetigkeit der Inklusionen folgt direkt aus Satz 2.7 und Satz I.3.9

Gelte nun $(\mathbf{M_2})$. Für $K_n \nearrow\!\!\nearrow \Omega$, wähle $\varphi_n \in \mathcal{D}_{(\omega)}(\Omega)$ mit $\varphi_n \equiv 1$ auf K_n. Dann sind die Halbnormensysteme

$$(u \mapsto \|\varphi u\|_{p,k})_{\varphi\in\mathcal{D}_{(\omega)}(\Omega)} \text{ und } (u \mapsto \|\varphi_n u\|_{p,k})_{n\in\mathbb{N}}$$

äquivalent. Denn sei $\varphi \in \mathcal{D}_{(\omega)}(\Omega)$ beliebig gegeben, so gibt es ein $n \in \mathbb{N}$ mit $\operatorname{supp}\varphi \subseteq K_n$. Deswegen gilt dann

$$\varphi u = \varphi_n \varphi u.$$

Daraus folgt mit Satz 2.9:

$$\|\varphi u\|_{p,k} = \|\varphi_n\varphi u\|_{p,k} \leq \|\varphi\|_{1,M_{k,1}} \|\varphi_n u\|_{p,k^1},$$

da man $K_2 = 1$ wählen kann. (Die umgekehrte Abschätzung ist trivial). Da $\mathrm{B}^{\omega,loc}_{p,k}$ nach Lemma 3.2 folgenvollständig ist, ist $\mathrm{B}^{\omega,loc}_{p,k}$ ein Fréchetraum.

Für jedes ω, k mit $(\mathbf{M_2})$ gilt zusätzlich noch

$$\mathrm{B}_{p,k} \subseteq \mathrm{B}^{\omega,loc}_{p,k}$$

(mit Satz 2.9).

Analog zu Satz 2.5 gilt:

Satz 3.4. *Sei* $\omega_r \in \mathcal{M}'$ $(r = 1,2)$ *mit* $\omega_2 \prec \omega_1$ *und* $k \in \mathcal{K}_{\omega_1} \cap \mathcal{K}_{\omega_2}$ *so, daß jeweils* $(\mathbf{M_2})$ *gilt. Sei*

$$i : \mathcal{D}'_{(\omega_2)} \to \mathcal{D}'_{(\omega_1)}$$

die kanonische Inklusion. Die Einschränkung von i *auf* $\mathrm{B}_{p,k}^{\omega_2,loc}(\Omega)$ *ist ein Isomorphismus auf* $\mathrm{B}_{p,k}^{\omega_1,loc}(\Omega)$.

Beweis. Da $\mathrm{B}_{p,k}^{\omega_1}$ und $\mathrm{B}_{p,k}^{\omega_2}$ isometrisch isomorph sind (Satz 2.5) und

$$\mathcal{D}_{(\omega_1)}(\Omega) \subseteq \mathcal{D}_{(\omega_2)}(\Omega) \tag{3-1}$$

gilt (Lemma I.5.6), ist i offensichtlich eine lineare und injektive Abbildung von $\mathrm{B}_{p,k}^{\omega_2,loc}(\Omega)$ nach $\mathrm{B}_{p,k}^{\omega_2,loc}(\Omega)$. Da nach (3-1) jede Halbnorm $u \mapsto \|u\varphi\|_{p,k}$ auf $\mathrm{B}_{p,k}^{\omega_1,loc}(\Omega)$ (mit $\varphi \in \mathcal{D}_{(\omega_1)}(\Omega)$) eine stetige Halbnorm auf $\mathrm{B}_{p,k}^{\omega_2,loc}(\Omega)$ ist, folgt, daß die Einschränkung von i stetig ist.

Nach dem „Satz von der offenen Abbildung“ ist nur noch die Surjektivität zu zeigen. Sei dazu $u \in \mathrm{B}_{p,k}^{\omega_1,loc}(\Omega)$, $K_n \nearrow\!\!\nearrow \Omega$ und $\psi_n \in \mathcal{D}_{(\omega_1)}$ mit $\psi_n \equiv 1$ auf K_n gegeben.

Fixiere ein beliebiges $n \in \mathbb{N}$. Für jedes $\varphi \in \mathcal{D}_{(\omega_1)}(K_n)$ gilt dann $\varphi u = \varphi\psi_n u$. Aus Satz 2.9 folgt (da man $K_2 = 1$ wählen kann)

$$\|\varphi u\|_{p,k}^{(\omega_1)} \leq \|\varphi\|_{1,M_{k,1}} \|\psi_n u\|_{p,k}.$$

Weil nach Definition 1.1 und $(\mathbf{M_0})$ $M_{k,1} \leq e^{\lambda\omega_2}$ gilt, folgt für jedes $\varphi \in \mathcal{D}_{(\omega_1)}(K_n)$:

$$\|\varphi u\|_{p,k}^{(\omega_1)} \leq \underbrace{C_n}_{=\|\psi_n u\|_{p,k}} \|\varphi\|_{p,k^1}^{(\omega_2)}. \tag{3-2}$$

Aufgrund der Dichtheit von $\mathcal{D}_{(\omega_1)}$ in $\mathcal{D}_{(\omega_2)}$ (Lemma I.5.6), kann u auf $\mathcal{D}_{(\omega_2)}$ so fortgesetzt werden, daß (3-2) für $\mathcal{D}_{(\omega_2)}(K_n)$ gilt. Da das so erhaltene u in $\mathrm{B}_{p,k}^{\omega_2,loc}(\Omega)$ liegt, ist die Surjektivität gezeigt.

Analog zu Definition 2.6 verfährt man auch hier:

Definition 3.5. *Sei* $\omega \in \mathcal{M}'$, $k \in \mathcal{K}_\omega$ *so, daß* $(\mathbf{M_2})$ *gilt. Fixiere* $1 \leq p \leq \infty$. *Für alle* $\tilde{\omega} \in \mathcal{M}'$ *so, daß* $(\mathbf{M_2})$ *für* $(\tilde{\omega},\ k)$ *gilt, identifiziert man die zugehörigen* $\mathrm{B}_{p,k}^{\omega,loc}(\Omega)$. *Das Ergebnis nennt man*

$$\mathrm{B}_{p,k}^{loc}(\Omega).$$

$\mathrm{B}_{p,k}^{loc}(\Omega)$ *ist mit der natürlichen Topologie ausgestattet.*

In diesem Fall gilt dann sogar:

$$\mathrm{B}_{p,k}^{c}(\Omega) \subseteq \mathrm{B}_{p,k} \subseteq \mathrm{B}_{p,k}^{loc}$$

mit stetigen Inklusionen, falls auf $\mathrm{B}_{p,k}^{c}(\Omega)$ die Spurtopologie von $\mathrm{B}_{p,k}$ gewählt wird.

Für jedes $\omega \in \mathcal{M}'$ und $k \in \mathcal{K}_\omega$ gilt:

$$\mathcal{D}_{(\omega)}(\Omega) \subseteq \mathcal{E}_{(\omega)}(\Omega) \subseteq \mathrm{B}_{p,k}^{\omega,loc}(\Omega).$$

Für $\Omega = \mathbb{R}^N$ gilt dann natürlich auch $\mathcal{S}_\omega \subseteq \mathrm{B}_{p,k}^{\omega,loc}(\Omega)$.

Satz 3.6. *Seien $U, W \subset \mathbb{R}^N$ beschränkt und offen mit $\overline{U} - \overline{W} \subseteq \Omega$, $\omega \in \mathcal{M}'$, $k_r \in \mathcal{K}_\omega$ $(r = 1, 2)$. Für $u_1 \in \mathrm{B}^{\omega,c}_{p,k_1}(W)$ und $u_2 \in \mathrm{B}^{\omega,loc}_{\infty,k_2}(\Omega)$ gilt:*

$$u_1 * u_2 \in \mathrm{B}^{\omega,loc}_{p,k_1k_2}(U).$$

Beweis. Es reicht zu zeigen, daß für jedes $\varphi \in \mathcal{D}_{(\omega)}(U)$

$$\varphi(u_1 * u_2) \in \mathrm{B}_{p,k_1k_2}$$

gilt. Sei dazu $\varphi \in \mathcal{D}_{(\omega)}(U)$ beliebig gegeben. Definiere

$$K := K_\varphi := \{x \in \mathbb{R}^N \mid x + \operatorname{supp} u_1 \cap \operatorname{supp} \varphi \neq \emptyset\}.$$

Offensichtlich ist K beschränkt und abgeschlossen, d.h. kompakt. Nach Voraussetzung gilt $K \subseteq \Omega$, da aus $x \in K$ die Existenz von $y \in \operatorname{supp} u_1 \subset W$ mit

$$x + y \in U \Rightarrow x \in U - y \subset U - W \subset \Omega$$

folgt. Wähle ein $\psi \in \mathcal{D}_{(\omega)}(\Omega)$ mit $\psi|_K \equiv 1$. Dann gilt:

$$u_1 * u_2 - u_1 * (\psi u_2) = u_1 * (u_2 - \psi u_2).$$

Deswegen ist:

$$\operatorname{supp}(u_2 - u_1 * (\psi u_2)) \subseteq \operatorname{supp} u_1 + U \setminus K$$

Daraus folgt mit der Definition von K:

$$\operatorname{supp}(u_2 - u_1 * (\psi u_2)) \cap \operatorname{supp} \varphi = \emptyset.$$

Damit gilt:

$$\varphi(u_1 * u_2) = \varphi(u_1 * \psi u_2).$$

Definitionsgemäß gilt $\psi u_2 \in \mathrm{B}^{\omega,c}_{\infty,k_2}$ und daher $\mathcal{D}_{(\omega)}\, \psi u_2 \subseteq \mathrm{B}_{\infty,k_2}$. Deswegen folgt aus Bemerkung 2.10.(1):

$$\|\hat{u}_2(. - x)k_2\|_{L_\infty} \leq Ce^{\lambda_2\omega(x)}.$$

Analog gilt für u_1: $\|\hat{u}_1(. - x)k_1\|_{L_p} \leq Ce^{\lambda_1\omega(x)}$. Damit gilt dann:

$$\|(\hat{u}_1\hat{u}_2)(x - t)(k_1k_2)(x)\|_{L_p,x} \leq Ce^{(\lambda_1+\lambda_2)\omega(t)}$$

und daher

$$\begin{aligned}
\|\varphi(u_1 * u_2)\|_{p,k_1k_2} &= \|\hat{\varphi} * (\hat{u}_1\hat{u}_2)k_1k_2\|_{L_p} \\
&= \| \int_{\mathbb{R}^N} \hat{\varphi}(t)(\hat{u}_1\hat{u}_2)(x - t)\, dt (k_1k_2)(x)\|_{L_p,x} \\
&\leq \int_{\mathbb{R}^N} |\hat{\varphi}|(t)\, \|(\hat{u}_1\hat{u}_2)(x - t)(k_1k_2)(x)\|_{L_p,x}\, dt \\
&\leq C \int_{\mathbb{R}^N} |\hat{\varphi}|(t)e^{(\lambda_1+\lambda_2)\omega(t)}\, dt = C\|\varphi\|_{\lambda_1+\lambda_2} < \infty.
\end{aligned}$$

Da $\varphi \in \mathcal{D}_{(\omega)}(U)$ beliebig war, folgt damit die Behauptung.

Sei $\omega \in \mathcal{M}'$, $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ offen. Für $n \in \mathbb{N}$ sei $k_n \in \mathcal{K}_\omega$ und $1 \leq p_n \leq \infty$. Setze

$$F := F(\Omega) := \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \mathrm{B}^{\omega,loc}_{p_n,k_n}(\Omega)$$

mit der Topologie, die durch das Halbnormensystem

$$(u \mapsto \|\varphi u\|_{p_n,k_n})_{n \in \mathbb{N}, \varphi \in \mathcal{D}_{(\omega)}(\Omega)}$$

gegeben wird. Analog definiere für $\tilde{k}_n := \tilde{P}k_n$ den Raum $F_P(\Omega)$.

Der folgende Satz ist der Grund dafür, daß es nicht ausreicht nur Funktionen $k \in \mathcal{K}_\omega$ mit $(\mathbf{M_2})$ zu betrachten:

Satz 3.7. *Gilt für $(k_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$, ω, F und Ω wie oben mit $(K_{n,i})_{\substack{n\in\mathbb{N}\\ i=1,2}}$ hierzu gemäß $(\mathbf{M_0})$ gewählt, die folgende Bedingung:*

$$\forall n \in \mathbb{N}\, \exists m \in \mathbb{N}\ :\ p_n = p_m \text{ und } k_m \geq k_n^{K_n} \quad \textit{und } (\mathbf{M_1}) \textit{ gilt für jedes } k_n \tag{$\mathbf{F}$}$$

so ist F ein Fréchetraum. Gilt $k_n = e^{n\omega}$, so ist $(\mathbf{F})$ für F und F_P immer erfüllt und F ist isomorph zu $\mathcal{E}_{(\omega)}(\Omega)$. Wenn für $(k_r,\, \omega)$ $(\mathbf{M_2})$ gilt ($r \in \mathbb{N}$), so folgt $(\mathbf{F})$ trivialerweise.

Beweis. Um die Metrisierbarkeit zu zeigen, wähle eine kompakte Ausschöpfung K_n von Ω sowie $\varphi_n \in \mathcal{D}_{(\omega)}(\Omega)$ mit $\varphi_n|_{K_n} \equiv 1$. Für $\psi \in \mathcal{D}_{(\omega)}(\Omega)$ und $n \in \mathbb{N}$ existiert dann ein $m \in \mathbb{N}$ mit $\psi = \varphi_m\psi$, $k_n^{K_{n,2}} \leq k_m$ und $p_n = p_m$. Für jedes $u \in F$ gilt dann:

$$\|\psi u\|_{p_n,k_n} = \|\psi\varphi_m u\|_{p_n,k_n} \overset{\text{Satz 2.9}}{\leq} C_\psi \|\varphi_m u\|_{p_n,k_n^{K_{n,2}}} \leq C\|\varphi_m\|_{p_m,k_m} < \infty.$$

Damit ist die Metrisierbarkeit gezeigt.

F ist vollständig, da die Konvergenz in F äquivalent zur Konvergenz in jeder Stufe des projektiven Limes ist.

Für $\omega \in \mathcal{M}'$, $k_n = e^{n\omega}$ ist $(\mathbf{F})$ offensichtlich erfüllt. Wegen $\tilde{P}(x) \leq C(1+|x|)^{\deg P} \leq Ce^{b \deg P\omega(x)}$ (mit (γ)) gilt $(\mathbf{F})$ offensichtlich auch für F_P.

Sei $u \in F(\Omega)$ beliebig, wähle mit (γ') ein $\gamma > 0$ so, daß $e^{-\gamma\omega} \in L_p$ gilt. Sei $u \in F$, $\varphi \in \mathcal{D}_{(\omega)}(\Omega)$ und $\lambda > 0$ beliebig gegeben. Dann existiert ein $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq \lambda$, d.h. $e^{\lambda\omega} \leq k_n$. Zu diesem n wähle ein $m \in \mathbb{N}$ mit $m - n \geq \gamma$. Dann gilt:

$$\begin{aligned}
\|\varphi u\|_\lambda &= \|\varphi u\|_{1,\lambda\omega} \leq \|\varphi u\|_{1,k_n} = \|\widehat{\varphi u}k_n\|_{L_1} \\
&\overset{\text{Hölder}}{\leq} \|\widehat{\varphi u}k_m\|_{L_p}\, \|\frac{k_n}{k_m}\|_{L_{p'}} = \|e^{(n-m)\omega}\|_{L_{p'}}\, \|\varphi u\|_{p,k_m} \\
&\leq \|e^{-\gamma\omega}\|_{L_{p'}}\, \|\varphi u\|_{p,k_m} < \infty.
\end{aligned}$$

Da λ und φ beliebig waren, folgt $u \in \mathcal{E}_\omega(\Omega)$. Da $\mathcal{E}_{(\omega)}(\Omega) \subseteq \mathrm{B}_{p,k}^{\omega,loc}$ für jedes $k \in \mathcal{K}_\omega$ gilt, ist der Satz bewiesen.

Satz 3.8. *Sei $\omega \in \mathcal{M}'$. Für alle $1 \leq p \leq \infty$ gilt:*

$$\bigcup_{k\in\mathcal{K}_\omega} \mathrm{B}_{p,k}^{\omega,loc}(\Omega) = \mathcal{D}'_{(\omega)F}(\Omega)$$

Beweis. Sei $u \in \mathrm{B}_{p,k}^{\omega,loc}$ und $\varphi \in \mathcal{D}_{(\omega)}(\Omega)$ beliebig. Nach Definition 3.1 ist dann $\varphi u \in \mathrm{B}_{p,k}$. Wie im Beweis von Satz 2.2 wird die Existenz von $\lambda = \lambda_k > 0$ (welches nur von k abhängt) mit

$$\int_{\mathbb{R}^N} |\widehat{\varphi u}| e^{-\lambda\omega}\, dx < \infty$$

gezeigt. Damit folgt dann für jedes $\psi \in \mathcal{D}_{(\omega)}(\Omega)$:

$$|\varphi u(\psi)| = |\langle \varphi u, \psi\rangle| = (2\pi)^{-N}|\langle \widehat{\varphi u}, \check{\hat{\psi}}\rangle \leq C_{u,\varphi}\|\hat{\psi}e^{\lambda\omega}\|_{L_\infty}.$$

Sei $K \quad \Omega$ fixiert. Wird nun ein $\varphi \in \mathcal{D}_{(\omega)}(\Omega)$ mit $\varphi|_K \equiv 1$ gewählt, so gilt für jedes $\psi \in \mathcal{D}_{(\omega)}(K)$:

$$|u(\psi)| = |u\varphi u(\psi)| \leq C_\varphi \|\psi\|_\lambda^{(\omega)}.$$

Daraus folgt dann $u \in \mathcal{D}'{}_{(\omega)F}(\Omega)$, da es nach Korollar I.3.5 ein Λ und ein $C > 0$ gibt so, daß $\|\hat{\psi} e^{\lambda\omega}\|_{L_\infty} \leq C \|\psi\|_\Lambda$ gilt.

Sei umgekehrt $u \in \mathcal{D}'{}_{(\omega)F}(\Omega)$ beliebig gegeben. Dann existiert ein $\tilde{\lambda} > 0$ so, daß für jedes $K \quad \Omega$ ein $C = C_K > 0$ existiert, mit

$$\forall \psi \in \mathcal{D}_{(\omega)}(K) \ : \ |u(\psi)| \leq C \|\psi\|_{\tilde{\lambda}}^{(\omega)}. \tag{3-3}$$

Sei $\varphi \in \mathcal{D}_{(\omega)}(K)$ beliebig. Dann ist $\varphi u \in \mathcal{E}'_{(\omega)}(K)$ und es gilt:

$$\widehat{\varphi u}(x) = (\varphi u)_y(e^{-i\langle x,y\rangle}) = u_y(\varphi e^{-i\langle x,y\rangle}).$$

Wegen $\widehat{\varphi e^{-i\langle x,y\rangle}} = \hat{\varphi}(x+y)$ folgt aus (3-3) und (α')

$$|\widehat{\varphi u}(x)| \leq C_K \|\varphi(x+y)\|_{\lambda,y} \leq C_K \|\varphi\|_{K\lambda} e^{K\lambda\omega(x)}.$$

Mit γ aus (γ') folgt dann $(k := e^{-(\gamma + K\lambda)\omega})$

$$\|\varphi u\|_{p,k} = \|\widehat{\varphi u} k\|_{L_p} \leq C_K \|e^{-\gamma\omega}\|_{L_p} < \infty.$$

Da φ beliebig war, folgt die Behauptung.

In dem Beweis wurde sogar $\mathcal{D}'{}_{(\omega)F}(\Omega) = \bigcap_{\lambda<0} \mathrm{B}_{p,\exp(\lambda\omega)}\, \omega, loc(\Omega)$ gezeigt.

Lemma 3.9. Sei F mit $(\mathbf{F})$ wie in Satz 3.7. Dann gilt für jedes $u \in F \cap \mathcal{E}'_{(\omega)}$ und $u_\varepsilon = u * \phi_\varepsilon$ mit $\phi\varepsilon$ wie in Satz I.5.5:

$$u_\varepsilon \to u \ \text{ in } F, \text{ für} \varepsilon \to 0.$$

Beweis. Da u und u_ε kompakte Träger haben, sind u und $u_\varepsilon \in \mathrm{B}_{p_n,k_n}$ für jedes $n \in \mathbb{N}$. Offensichtlich reicht es, die Behauptung für jedes n zu zeigen. Fixiere daher ein beliebiges $n \in \mathbb{N}$, setze $k := k_n$ und $p := p_n$.

Wegen $\|u - u_\varepsilon\|_{p,k} = \|\hat{u}(1 - \hat{\phi}_\varepsilon)k\|_{L_p} \leq 2\|\hat{u}k\|_{L_p} = 2\|u\|_{p,k} < \infty$ und $\hat{u}_\varepsilon \to \hat{u}$ punktweise, folgt mit dem Satz von Lebesgue:

$$u_\varepsilon \to u \text{ in } \mathrm{B}_{p,k}.$$

Wähle $m \in \mathbb{N}$ gemäß $(\mathbf{F})$. Dann gilt $u \in \mathrm{B}_{p_n,k_n^{K_{n,2}}} \subseteq \mathrm{B}_{p_m,k_m}$. Daher folgt aus Satz 2.9:

$$\|\varphi(u - u_\varepsilon)\|_{p_n,k_n} \leq C_\phi \|u - u_\varepsilon\|_{p_m,k_m} \to 0$$

für jedes $\varphi \in \mathcal{D}_{(\omega)}$. Damit ist die Behauptung gezeigt.

Satz 3.10. *Sei $\omega \in \mathcal{M}'$, $k \in \mathcal{K}_\omega$, $1 \leq p < \infty$ und p' mit $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$ so gegeben, daß $(\mathbf{M_2})$ gilt. Dann folgt:*

$$\mathrm{B}_{p,k}^{\omega,loc}(\Omega)' = B_{p',\frac{1}{k}}^{\omega,c}(\Omega).$$

Beweis. „$\subseteq$:“ Sei $\mu \in \mathrm{B}_{p,k}^{\omega,loc}(\Omega)'$. Dann existiert ein $\varphi \in \mathcal{D}_{(\omega)}(\Omega)$ sowie ein $C > 0$ mit:

$$\forall f \in \mathrm{B}_{p,k}^{\omega,loc} \ : \ |\mu(f)| \leq C\|\varphi f\|_{p,k}.$$

Deswegen gilt dann :

$$\operatorname{supp} \mu \subseteq \operatorname{supp} \varphi$$

und damit $\mu \in \mathcal{E}'_{(\omega)}(\Omega)$. Wegen

$$\mu \in \mathrm{B}_{p,k}^{\omega,loc}(\Omega)' \subseteq \mathrm{B}'_{p,k} \overset{\text{Satz 2.13}}{=} \mathrm{B}_{p',\frac{1}{k}}$$

folgt dann $\mu \in \mathrm{B}_{p,\frac{1}{k}}^{\omega,c}$.

„$\supseteq$:“ Sei $\mu \in \mathrm{B}_{p',\frac{1}{k}}^{\omega\, c}$ beliebig gegeben. Wähle $\varphi \in \mathcal{D}_{(\omega)}(\Omega)$ mit $\varphi \equiv 1$ auf einer Umgebung von $\operatorname{supp} \mu$. Für $f \in \mathrm{B}_{p,k}^{\omega,loc}$ gilt dann:

$$|\mu(f)| := |\varphi\mu(f)| := |\varphi\mu(f)| := |\mu(\varphi f)| \leq C\|\varphi f\|_{p,k}$$

da $B_{p',\frac{1}{k}}^{\omega,c} \subseteq \mathrm{B}_{p',\frac{1}{k}} = \mathrm{B}'_{p,k}$ und $\varphi f \in \mathrm{B}_{p,k}$ nach Definition gelten.

Satz 3.11. *Seien $U, W \subset \mathbb{R}^N$ beschränkt und offen mit $\overline{U} - \overline{W} \subseteq \Omega$. Ferner seien $u \in \mathcal{E}'_{(\omega)}(W)$ und $\phi \in \mathcal{E}_{(\omega)}(\Omega)$. Dann gilt:*

$$u * \phi \in \mathcal{E}_{(\omega)}(U).$$

Beweis. Mit Satz 3.6 und Satz 3.7.

Zum Abschluß dieses Kapitels wird noch gezeigt, daß einige der obigen Aussagen für beliebige (nicht subadditive) Gewichtsfunktionen im allgemeinen falsch sind:

Lemma 3.12. Seien E, F, G lokalkonvexe Räume, E und F metrisierbar und E tonneliert. Dann ist jede getrennt stetige bilineare Abbildung $B : E \times F \to G \ : \ (x, y) \mapsto B(x, y)$ stetig.

Speziell ist daher für jeden Fréchetraum E (F, G wie oben) jede getrennt steige bilineare Abbildung stetig.

Beweis. Da E und F metrisierbar sind, gibt es jeweils abzählbare Fundamentalsysteme von Nullumgebungen $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in E und $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in F.

Angenommen B ist nicht stetig, dann gibt es eine abgeschlossene, absolutkonvexe Nullumgebung W so, daß es für jedes $n \in \mathbb{N}$ Vektoren $x_n \in U_n$, $y_n \in V_n$ mit $B(x_n, y_n) \notin W$ gilt. Weil $y_n \in V_n$ für jedes $n \in \mathbb{N}$ gilt, folgt $y_n \to 0$ in F. Da für jedes $x \in E$ die Abbildung $B(x, .)$ stetig ist, folgt für jedes $x \in E$, daß $\Big(B(x, y_n)\Big)_{n\in\mathbb{N}}$ eine in G beschränkte Nullfolge ist.

Aus der tonneliertheit von E folgt mit Satz 23.27 [**MV**] die Existenz einer Nullumgebung U in E mit $B(U, y_n) \subseteq W$ für jedes $n \in \mathbb{N}$. Da $x_n \to 0$ in E gilt, folgt $x_n \in U$ für $n \geq N$ und daher $B(x_n, y_n) \in W$ für $n \geq N$.

Da nach Satz 23.23 [**MV**] jeder Fréchetraum tonneliert ist, ist der Satz vollständig bewiesen.

SATZ 3.13. *Es gibt eine Gewichtsfunktion* $\omega \in \mathcal{M}'$ *sowie* $k \in \mathcal{K}_\omega$, $1 \leq p \leq \infty$ *so, daß* $(\mathbf{M_1})$ *und*

(1) $\mathrm{B}_{p,k} \nsubseteq \mathrm{B}_{p,k}^{\omega,loc}$
(2) $\mathcal{D}_{(\omega)}(K)\,\mathrm{B}_{p,k} \nsubseteq \mathrm{B}_{p,k}$
(3) $\mathcal{S}_\omega\,\mathrm{B}_{p,k} \nsubseteq \mathrm{B}_{p,k}$

gilt.

Offensichtlich gilt (1) $\Leftarrow$ (2) $\Rightarrow$ (3). Daher reicht es (2) zu zeigen:

BEWEIS. Sei $\tilde{\omega}$ die von Franken [**F**] in Satz 7.3 konstruierte Gewichtsfunktion, ω sei die mit Satz I.2.4 regularisierte Gewichtsfunktion. Dann ist ω gleichmäßig stetig, da ω' beschränkt ist, $\omega(0) = 0$ und jede subadditive Funktion $\sigma \geq \omega$ hat nicht (β).

„(2)“: Angenommen (2) gilt nicht. Dann ist die Abbildung

$$B : \mathcal{D}_{(\omega)}(K) \times \mathrm{B}_{p,k} \to \mathrm{B}_{p,k} : (\phi, u) \mapsto \phi u$$

wohldefiniert und nach dem „Satz vom abgeschlossenen Graphen“ getrennt stetig. Da $\mathcal{D}_{(\omega)}(K)$ für jedes Kompaktum K ein Fréchetraum ist, ist B als bilineare Abbildung stetig (Lemma 3.12). Daher gibt es C, $\lambda > 0$ so, daß für jedes $\varphi \in \mathcal{D}_{(\omega)}(K)$ und jedes $u \in \mathrm{B}_{p,k}$

$$\|\varphi u\|_{p,k} \leq C\|u\|_{p,k}\|\varphi\|_\lambda$$

gilt. Da $\mathcal{S}_\omega \subseteq \mathrm{B}_{p,k}$ (Satz 2.7) gilt, gilt für jedes $g \in \mathcal{S}_\omega$ und jedes $\varphi \in \mathcal{D}_{(\omega)}(K)$: $\|g\varphi\|_{p,k} \leq C\|g\|_{p,k}\,\|\varphi\|_\lambda$. Für $g := \widehat{\phi_\varepsilon * \delta_{-x}} \in \mathcal{S}_\omega$ folgt dann, wie im Beweis von 2.10.(1), für jedes $\varphi \in \mathcal{D}_{(\omega)}(K)$ und jedes $x \in \mathbb{R}^N$:

$$\|\hat{\varphi}(.-x)k\|_{L_p} \leq Ck^p(x)\|\varphi\|_\lambda.$$

Für $p = 1$ und $k = e^\omega$ folgt dann:

$$\int_{\mathbb{R}^N} |\hat{\varphi}|(t)e^{\omega(t-x)-\omega(x)}\,dt \leq C\|\varphi\|_\lambda. \tag{3-4}$$

Definiere $\sigma(t) := \sup_{x\in\mathbb{R}^N} \omega(x-t)-\omega(x) \leq c\Big||x-t|-|x|\Big| \leq c|t| < \infty$ mit $c := \sup_{t\in\mathbb{R}} \omega'(t) < \infty$. Offensichtlich gilt $\sigma(t) \geq \omega(t) = \omega(0-t) - \omega(0)$ und

$$\begin{aligned}\sigma(s+t) &= \sup_{x\in\mathbb{R}^N} \omega(s+t-x) - \omega(x)\\ &= \sup_{x\in\mathbb{R}^N} \omega(s+t-x) - \omega(x-t) + \omega(x-t) - \omega(x) \leq \sigma(s) + \sigma(t).\end{aligned}$$

Nach Voraussetzung hat σ daher nicht (β). Da ω jedoch (β) hat, folgt $\sigma/\omega \to \infty$.

Weil ω gleichmäßig stetig ist, gibt es ein Kompaktum $\tilde{K} \subseteq B_\delta$ so, daß für jedes x, $t \in \mathbb{R}^N$ sowie $\tilde{t} \in \tilde{K}$

$$\omega(t + \tilde{t} - x) \geq \omega(t-x) - \frac{1}{2}$$

gilt.

Sei $0 \not\equiv \psi \in \mathcal{D}_{(\omega)}(K)$ beliebig fixiert. Dann gibt es ein Kompaktum Q sowie $\varepsilon > 0$ so, daß $|\hat{\psi}|(x) \geq \varepsilon$ für jedes $x \in Q$ gilt. Fixiere $x_0 \in \mathring{Q}$ beliebig. O.B.d.A. sei $\tilde{K} + x_0 \subseteq Q$, anderenfalls wird $\tilde{K}$ verkleinert.

Sei $t_0 \in \mathbb{R}^N$ beliebig. Dann existiert ein $x_1 \in \mathbb{R}^N$ mit $\sigma(t_0) - \frac{1}{2} \leq \omega(x_1 - t_0) - \omega(x_1)$. Daher gilt für $t \in \tilde{K} + t_0$:

$$\omega(x_1 - t) - \omega(x_1) \geq \omega(t_0 - x_1) - \omega(x_1) - \frac{1}{2} \geq \sigma(t_0) - 1. \tag{3-5}$$

Setze $\tilde{\varphi}(x) := \psi(x) e^{i\langle t_0 - x_0, x\rangle} \in \mathcal{D}_{(\omega)}(K)$. Dann gilt:

$$\hat{\tilde{\phi}}(t) = \hat{\phi}(t + t_0 - x_0) \tag{3-6}$$

und mit (α'):

$$\|\tilde{\phi}\|_\lambda \leq e^{\lambda K} \|\phi\|_{K\lambda} e^{K\lambda\omega(t_0 - x_0)} \leq e^{\lambda(K+K^2)} e^{\lambda K^2 \omega(x_0)} \|\phi\|_{K\lambda} e^{K^2\lambda\omega(t_0)} = C e^{\lambda K^2 \omega(t_0)}, \tag{3-7}$$

wobei C von t_0 unabhängig ist. Faßt man (3-4) - (3-7) zusammen, so gilt:

$$\begin{aligned} C e^{K^2\lambda\omega(t_0)} &\geq \int_{\mathbb{R}^N} |\hat{\tilde{\phi}}(t) e^{\omega(x-t)-\omega(x)} dt = \int_{\mathbb{R}^N} |\hat{\phi}|(t + x_0) e^{\omega(t+t_0-x)-\omega(x)} dt \\ &\geq \int_{\tilde{K}} |\hat{\phi}|(t + x_0) e^{\omega(t+t_0-x_0)-\omega(x)} dt \geq m_N(\tilde{K}) \varepsilon e^{\sigma(t_0)-1} \quad , \end{aligned}$$

da $\sigma/\omega \to \infty$ gilt.

KAPITEL 3

Existenz und Approximation von Lösungen von Differentialgleichungen

Nachdem, wie im klassischen Fall, die Lösbarkeit von $P(D)\,u = f$ mit $\operatorname{supp} f$ kompakt mittels Fundamentallösungen untersucht worden ist, wird damit die Approximation von Nullösungen durch Exponentiallösungen und durch Nullösungen mit größerem Träger untersucht. Diese Ergebnisse werden dann benutzt, um die Lösbarkeit von $P(D)\,u = f$, $f \in \mathcal{E}_{(\omega)}(\Omega)$ zu charakterisieren. (Die Gleichung ist genau dann immer lösbar, wenn Ω P-konvex ist.)

Im letzten Abschnitt dieses Kapitels wird noch, mit Hilfe der P-Konvexität für $\operatorname{sing}_\omega \operatorname{supp}$, die Surjektivität von $P(D) : \mathcal{D}'_{(\omega)} \to \mathcal{D}'_{(\omega)}$ untersucht.

1. $P(D)\,u = f$ mit $f \in \mathcal{E}'_{(\omega)}$

Wenn die rechte Seite einen kompakten Träger hat, kann immer mit Hilfe einer Fundamentallösung eine Lösung gefunden werden. Mit Hilfe der Räume $\mathrm{B}^{\omega,loc}_{p,k}$ wird eine Aussage über die Güte der Fundamentallösung formuliert. Da in dieser Arbeit Fundamentallösungen immer als aus $\mathcal{D}'$ vorausgesetzt werden, kann deren Existenz aus den Büchern von Hörmander ([**H1**] oder [**H2**]) übernommen werden.

Definition 1.1. *Eine Distribution $E \in \mathcal{D}'(\Omega) = \mathcal{D}'_{(\log(1+|x|))}$ heißt* Fundamentallösung *für den Differentialoperator $P(D)$, wenn*

$$P(D)\,E = \delta$$

gilt.

Satz 1.2. *Zu jedem Differentialoperator mit konstanten Koeffizienten existiert eine Fundamentallösung $E \in \mathrm{B}^{\log,loc}_{\infty,\tilde{P}} = \mathrm{B}^{loc}_{\infty,\tilde{P}}$.*

Beweis. Siehe [**H1**] Theorem 3.1.1. oder [**H2**] Theorem 10.2.1. .

Die Fundamentallösung aus Satz 1.2 ist in gewissem Sinne optimal, da aus $E \in \mathrm{B}^{\omega,loc}_{p,k}$ (E Fundamentallösung) schon $\mathrm{B}^{\omega,loc}_{\infty,\tilde{P}} \subseteq \mathrm{B}^{loc}_{p,k}$ folgt. Denn ist $\phi \in \mathcal{D}_{(\omega)}$ beliebig, so gilt für $\phi\, P(D)\,\delta$:

$$\|\phi\, P(D)\,\delta\|_{p,\frac{1}{\tilde{P}}} = \|P\hat{\phi}\frac{1}{\tilde{P}}\|_{L_p} \leq \|\hat{\phi}\|_{L_p} < \infty.$$

Daher ist $P(D)\,\delta \in \mathrm{B}^{\omega,loc}_{p,\frac{1}{\tilde{P}}}$. Wegen $P(D)\,u = P(D)\,\delta * u$ folgt daher aus Satz II.3.6:

$$\delta = P(D)\,E \in \mathrm{B}^{\omega,loc}_{p,\frac{k}{\tilde{P}}}\,.$$

Wegen $\operatorname{supp}\delta = \{0\}$, gilt sogar $\delta \in \mathrm{B}_{p,\frac{k}{\tilde{P}}}$. Aus $\hat{\delta} = 1$ folgt damit:

$$\|\frac{k}{\tilde{P}}\|_{L_p} = \|\hat{\delta}\frac{k}{\tilde{P}}\|_{L_p}.$$

Für $u \in \mathrm{B}_{\infty,\tilde{P}}$ gilt wegen $\tilde{P}\hat{u} \in L_\infty$ $k\hat{u} = \frac{k}{\tilde{P}}\tilde{P}\hat{u} \in L_p$, d.h. $u \in \mathrm{B}_{p,k}$ und damit $\mathrm{B}^{\omega,loc}_{\infty,\tilde{P}} \subseteq \mathrm{B}^{\omega,loc}_{p,k}$.

Sei nun E eine Fundamentallösung von $P(D)$ sowie $\omega \in \mathcal{M}'$. Dann gilt:

$$\forall f \in \mathcal{E}'_{(\omega)} \quad P(D)(E * f) = f \tag{1-1}$$

$$\forall u \in \mathcal{E}'_{(\omega)} \quad E * (P(D)\,u) = u \tag{1-2}$$

Satz 1.3. *Sei $\omega \in \mathcal{M}'$, $k \in \mathcal{K}_\omega$ sowie $1 \leq p \leq \infty$. Ferner sei $E \in \mathrm{B}^{loc}_{\infty,\tilde{P}}$ eine Fundamentallösung zu $P(D)$ sowie $f \in \mathrm{B}^{\omega,loc}_{p,k} \cap \mathcal{E}'_{(\omega)}$. Die Lösung von*

$$P(D)\,u = f \tag{1-3}$$

wird dann durch

$$u = E * f \tag{1-4}$$

gegeben. Es gilt: $u \in \mathrm{B}^{loc}_{p,k\tilde{P}}$.

Beweis. Der erste Teil folgt aus (1-1), der zweite aus Satz II.3.6, da $P(D)\,u = (P(D)\,\delta) * u$ und $P(D)\,\delta \in \mathrm{B}^{\omega,loc}_{\infty,\frac{1}{\tilde{P}}}$ gilt.

Da $\mathcal{E}'_{(\omega)} \subseteq \mathcal{D}'{}_{(\omega)F}$ gilt, kann man nach Satz II.3.8 die Gleichung

$$P(D)\,u = f$$

für jedes $f \in \mathcal{E}'_{(\omega)}$ lösen.

2. Approximation von Lösungen von homogenen Differentialoperatoren

Nachdem Exponentiallösungen eingeführt sind, wird untersucht wann die Gleichung $P(D)\,u = f$, $f \in \mathcal{E}'_{(\omega)}$ eine Lösung u mit kompaktem Träger hat. Mit den dazu notwendigen Lemmata wird dann gezeigt, daß die Exponentiallösungen dicht in der Menge aller Nullösungen in $F := proj_{n\to\infty} B^{\omega,loc}_{p_n,k_n}$ sind. Zum Abschluß wird dann noch ein weiterer Approximationsatz, der im nächsten Abschnitt benötigt wird, gezeigt. Hier geht es dann um Approximation durch „globale“ Nullösungen.

Definition 2.1. *Eine Lösung u von $P(D)\,u = 0$ heißt* Exponentiallösung, *wenn es $z \in {}^N$ sowie $f \in [z]$ gibt mit:*

$$u(x) = f(x)e^{i\langle x,z\rangle}.$$

Setze

$$E_P := \{u \in \mathcal{D}'_{(\omega)} \mid u \text{ ist eine Exponentiallösung von } P(D)\}$$

Da jede Exponentiallösung reell-analytisch ist, folgt mit der Bemerkung nach Satz I.3.9:

Korollar 2.2. *Für jedes $\omega \in \mathcal{M}'$ gilt $E_P \subseteq \mathcal{E}_{(\omega)}$.*

Für den Rest dieses Kapitels seien $\omega \in \mathcal{M}'$ und $P \in \ [z]$ fixiert. Setze:

$$F := F(\Omega) := \bigcap_{j=1}^{\infty} \mathrm{B}^{\omega,loc}_{p_j,k_j}(\Omega)$$

und

$$F_P := F_P(\Omega) := \bigcap_{j=1}^{\infty} \mathrm{B}^{\omega,\mathrm{loc}}_{p_j,\tilde{P}k_j}(\Omega)$$

mit $k_j \in K_\omega, 1 \leq p_j \leq \infty$ so, daß $(\mathbf{F})$ aus Satz II.3.7 für F unf F_P gilt. Dann sind F und F_P mit den Topologien aus Satz II.3.7 Frechéträume.

Lemma 2.3. Sei $\omega \in \mathcal{M}'$ beliebig. Für $v \in \mathcal{E}'_{(\omega)}(\mathbb{R}^N)$ und $u \in \mathcal{E}_{(\omega)}(\mathbb{R}^N \times \mathbb{R})$ gilt dann:

$$\frac{\partial}{\partial t} v_x(u(x,t)) = v_x(\frac{\partial}{\partial t} u(x,t)).$$

Beweis. Für $\psi \in \mathcal{D}_{(\omega)}$ mit $\psi \equiv 1$ auf einer Umgebung von $\operatorname{supp} v$ gilt für jedes $t \in \mathbb{R}$: $v_x(\psi(x)u(x,t)) = v_x(u(x,t))$. Daher kann man o.B.d.A. annehmen, daß es ein $K \quad \mathbb{R}^N$ gibt, mit $u(x,t) = 0$ für alle $x \notin K$. Zeige:

$$t \mapsto v_x(u(x,t)) \in C^1(\mathbb{R}).$$

Fixiere dazu ein beliebiges $t \in \mathbb{R}$. Da $\frac{\partial^2}{\partial t^2} u(x,t) \in \mathcal{E}_{(\omega)}(\mathbb{R}^N \times \mathbb{R})$ gilt, ist für jedes $m \in \mathbb{N}$

$$p_{K\times[-1+t,1+t],m}(\frac{\partial^2}{\partial t^2} u(x,t)) = C_m < \infty,$$

wobei $p_{K,m}$ wie in Definition I.3.8 ist. Da $\operatorname{supp} u(x,t) \subseteq K$ für jedes t gilt, ist die Menge $\{u(x,s) \mid s \in [-1+t, 1+t]\}$ nach Korollar I.3.5 in $\mathcal{D}_{(\omega)}(K)$ beschränkt.

Da $\mathcal{E}_{(\omega)} \subseteq C^\infty$ gilt, folgt aus dem Satz von Taylor für $|h| \leq 1$:

$$u(x,t+h) = u(x,t) + h\frac{\partial}{\partial t}u(x,t) + \frac{h^2}{2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}u(x,s)$$

mit einem $s \in [-1+t, 1+t]$. Daher gilt:

$$\frac{v_x(u(x,t)) - v_x(u(x,t+h))}{h} = v_x(\frac{\partial}{\partial t}u(x,t)) + \frac{h}{2}v_x(\frac{\partial^2}{\partial t^2}u(x,s)).$$

Da $\{v_x(\frac{\partial^2}{\partial t^2}u(x,s)) \mid s \in t + [-1,1]\}$ beschränkt ist, folgt die Behauptung für $h \to 0$.

Lemma 2.4. Sei $v \in \mathcal{E}'_{(\omega)}$ mit $v(E_P) = \{0\}$. Dann gilt

$$\frac{\hat{v}}{\check{P}} \in A(\ ^N).$$

Beweis. P_m bezeichne den Hauptteil von P d.h. für $P(x) = \sum_{|\alpha|\leq m} a_\alpha x^\alpha$ gilt

$$P_m(x) = \sum_{|\alpha|=m} a_\alpha x^\alpha.$$

Jedes $\vartheta \neq 0$ mit $P_m(\vartheta) \neq 0$ erfüllt dann

$$\forall \xi \in \ ^N : \frac{\partial}{\partial t}\check{P}(t\vartheta + \xi) \not\equiv 0, \tag{2-1}$$

da

$$\frac{\partial}{\partial t}\check{P}(t\vartheta+\xi) = \underbrace{\frac{\partial}{\partial t}\check{P}_m(t\vartheta+\xi)}_{\deg_t = m-1} + \underbrace{R(t\vartheta+\xi)}_{\deg_t \le m-2}$$

gilt.

Zeige als nächstes:

$$\forall \xi : t \mapsto \frac{\hat{v}(t\vartheta+\xi)}{\check{P}(t\vartheta+\xi)} \in A(\ ) \tag{2-2}$$

Sei dazu ξ beliebig und t_0 eine l-fache Nullstelle von $\check{P}(t\vartheta+\xi)$. Wegen

$$D_x^\alpha e^{-i\langle x, t\vartheta+\xi\rangle} = D_x^\alpha e^{\langle x, i(-t\vartheta-\xi)\rangle} = i^{|\alpha|}(-i)^{|\alpha|}(-t\vartheta-\xi)^\alpha e^{-i\langle x, t\vartheta+\xi\rangle}$$

erhält man:

$$P(D)\, e^{-i\langle x, t\vartheta+\xi\rangle} = \check{P}(t\vartheta+\xi) e^{-i\langle x, t\vartheta+\xi\rangle}.$$

Anwenden von $\frac{\partial^j}{\partial t^j}|_{t_0}$ liefert:

$$\begin{aligned}
&(-i)^j\, P(D)\langle x, \vartheta\rangle^j e^{-i\langle x, t_0\vartheta+\xi\rangle} \\
&= \frac{\partial^j}{\partial t^j}|_{t_0}\, P(D)\, e^{-i\langle x, t\vartheta+\xi\rangle} = \frac{\partial^j}{\partial t^j}|_{t_0} \check{P}(t\vartheta+\xi) e^{-i\langle x, t\vartheta+\xi\rangle} \\
&= \sum_{k=0}^{j} \binom{j}{k} \frac{\partial^k}{\partial t^k}|_{t_0} \check{P}(t\vartheta+\xi)\ \frac{\partial^{(j-k)}}{\partial t^{(j-k)}}|_{t_0} e^{-i\langle x, t\vartheta+\xi\rangle} = 0, \text{ falls } j < l.
\end{aligned}$$

Insgesamt gilt damit:

$$\forall j < l : P(D)\, \underbrace{\langle x, \vartheta\rangle^j e^{-i\langle x, t_0\vartheta+\xi\rangle}}_{\Rightarrow \in E_P} = 0$$

und somit

$$\forall j < l : 0 = v_x(\langle x, \vartheta\rangle^j e^{-i\langle x, t_0\vartheta+\xi\rangle}).$$

Wegen Satz I.6.9 gilt

$$\hat{v}(t_0\vartheta+\xi) = v_x(e^{-i\langle x, t_0\vartheta+\xi\rangle}) = 0$$

Da $\frac{\partial}{\partial t} v_x(u(x,t)) = v_x(\frac{\partial}{\partial t} u(x,t))$ gilt (mit Lemma 2.3); dies impliziert

$$\hat{v}(t\vartheta+\xi) \ \text{ hat eine mindestens } l\text{-fache Nullstelle bei } t_0$$

und damit auch (2-2). Daher gibt es für jedes $\xi \in {}^N$ eine ganze Funktion $h_\xi \in A(\ )$ mit $h_\xi(t) = \frac{\hat{v}}{\check{P}}(t\vartheta+\xi)$, falls $\check{P}(t\vartheta+\xi) \neq 0$ gilt.

Definiere nun $F(\xi) := h_\xi(0)$ und zeige, daß F holomorph ist. Sei dazu ξ_0 beliebig gegeben. Da $\check{P}(t\vartheta+\xi_0)$ (als Polynom in t) nur endlich viele Nullstellen (m) hat, gibt es ein $r > 0$ so, daß

$$\forall |t| = r : \check{P}(t\vartheta+\xi_0) \neq 0$$

gilt. Definiere:

$$N_{\check{P}} := \{z \mid \check{P}(z) = 0\}.$$

Da $N_{\check{P}}$ abgeschlossen ist, existiert eine offene Umgebung U von ξ_0 mit:

$$\forall \xi \in U, |t| = r : \check{P}(t\vartheta+\xi) \neq 0.$$

Damit gilt dann für $\xi \in U$:

$$F(\xi) \;=\; \frac{1}{2\pi i}\int_{|t|=r} \frac{h_\xi(t)}{t}\,dt = \frac{1}{2\pi i}\int_{|t|=r} \frac{\hat{v}}{\check{P}}(t\vartheta+\xi)\frac{dt}{t}$$

und

$$\frac{\partial}{\partial\overline{\xi}_j}F(\xi) \;=\; \frac{1}{2\pi i}\int_{|t|=r} \frac{\partial}{\partial\overline{\xi}_j}\left(\frac{\hat{v}}{\check{P}(t\vartheta+\xi)}\right)\frac{dt}{t} = 0$$

da $\frac{\hat{v}}{\check{P}}(t\vartheta+\xi)$ auf U in ξ holomorph ist. Daraus folgt die Holomorphie von F.

Lemma 2.5. Sei $F \in A(\ ^N)$, $p(z) \in\ [z]$, $\deg p \leq m$. Für jede Funktion $\psi \in L_1^c$ mit $0 \leq \psi$ und $\psi(z_1,\ldots,z_n) = \psi(|z_1|,\ldots,|z_n|)$ gilt dann:

$$|F(0)p^{(\alpha)}(0)|\int_{\ ^N} |z^\alpha|\psi(z)\,dz \leq C_{m,|\alpha|}\int_{\ ^N} |FP|\psi\,dz. \tag{2-3}$$

Beweis. siehe [**H1**] Lemma 3.1.4

Lemma 2.6. Wenn $v \in \mathcal{E}'_{(\omega)}$ mit $\frac{\hat{v}}{\check{P}} \in A(\ ^N)$ ist, so existiert ein $\mu \in \mathcal{E}'_{(\omega)}(\operatorname{ch}\operatorname{supp} v)$ mit

$$\hat{\mu} = \frac{\hat{v}}{\check{P}} \text{ d.h. } \check{P}(D)\,\mu = v.$$

Beweis. Setze $F := \frac{\hat{v}}{\check{P}}$. Nach Lemma 2.4 ist F holomorph. Aus Lemma 2.5 mit $\tilde{F} := F(.+z)$, $\tilde{P} = \check{P}(.+z)$ und $\phi := \chi_{\overline{B}_1^N}$ folgt dann:

$$\begin{aligned}|F\check{P}^{(\alpha)}|(z)\int_{\overline{B}_1^N} |x|^\alpha\,dx \;&\leq\; C_{m,|\alpha|}\int_{B_1^N} |F(x+z)\check{P}(x+z)|\,dx\\ &=\; C_{|\alpha|}\int_{B_1^N} |\hat{v}|(x+z)\,dx \leq C_{|\alpha|}m_{2N}(B_1^N)\sup_{x\in B_1^N} |\hat{v}|(x+z),\end{aligned}$$

d.h. es gilt:

$$|F(z)\check{P}(z)| \leq C_{|\alpha|}\sup_{x\in B_1^N} |\hat{v}|(x+z).$$

Wähle nun α mit $\check{P}^{(\alpha)} \equiv c$; dann gilt:

$$|F(z)| \leq C\sup_{x\in B_1^N} |\hat{v}|(x+z). \tag{2-4}$$

Nach Satz I.6.12 existiert ein $\lambda > 0$ so, daß es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $C > 0$ mit $(H := H_{\operatorname{supp} v})$

$$|\hat{v}|(x+z) \leq Ce^{H(\operatorname{Im}(x+z))+\varepsilon|\operatorname{Im} x+z|+\lambda\omega(\operatorname{Re}(x+z))}$$

gibt. Fixiere nun ein beliebiges $\varepsilon > 0$. Da $x \in B_1$ gilt und H subadditiv ist, kann weiter abgeschätzt werden:

$$|\hat{v}|(x+z) \leq Ce^{H(\operatorname{Im} z)+\varepsilon|\operatorname{Im} z|+K\lambda\omega(\operatorname{Re} z)},$$

d.h.

$$|F(z)| \leq \sup_{x\in B_1^N} |\hat{v}|(x+z)| \leq Ce^{H(\operatorname{Im} z)+\varepsilon|\operatorname{Im} z|+K\lambda\omega(\operatorname{Re} z)}.$$

Da $\varepsilon > 0$ beliebig war folgt mit I.6.12, daß ein $\mu \in \mathcal{E}'_{(\omega)}$ existiert mit

$$\operatorname{supp}\mu \subseteq \operatorname{ch}\operatorname{supp} v \quad \text{und} \quad \hat{\mu} = F = \frac{\hat{v}}{\hat{P}}.$$

Damit gilt dann

$$\hat{\mu} = \frac{\hat{v}}{\check{P}} \iff \check{P}\hat{\mu} = \hat{v} \iff (\check{P}(D)\,\delta) * \mu = \check{P}(D)\,\mu = v.$$

SATZ 2.7. *Für jede konvexe offene Menge $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ ist die lineare Hülle $[E_P]$ der Exponentiallösungen dicht in der Menge aller Lösungen von $P(D)\,u = 0$ in $F(\Omega)$.*

BEWEIS. Sei $L \in F'(\Omega)$ mit $L(E_P) = \{0\}$. Aus den Sätzen II.3.3 und II.3.7 folgt $L|_{\mathcal{E}_{(\omega)}(\Omega)} =: v \in \mathcal{E}'_{(\omega)}(\Omega)$. Nach den Lemmata 2.4 und 2.6 gibt es ein $\mu \in \mathcal{E}'_{(\omega)}(\Omega)$ mit $\check{P}(D)(\mu) = v$. Für jedes $u \in \mathcal{E}_{(\omega)}(\Omega)$ mit $P(D)\,u = 0$ in einer Umgebung von $\operatorname{supp}\mu$ gilt:

$$L(u) = v(u) = \check{P}(D)\,\mu(u) = \mu(P(D)\,u) = \mu(0) = 0.$$

Sei $u \in F(\Omega) \cap \mathcal{E}'_{(\omega)}(\Omega)$ mit $P(D)\,u = 0$ in einer Umgebung von $\operatorname{supp}\mu$. Dann gilt

$$u_\varepsilon := u * \phi_\varepsilon \in \mathcal{D}_{(\omega)} \text{ und } P(D)\,u_\varepsilon = P(D)\,u * \phi_\varepsilon = 0$$

in einer Umgebung von $\operatorname{supp}\mu$. Für hinreichend kleines ε gilt dann $L(u_\varepsilon) = 0$. Da L stetig ist und $u_\varepsilon \to 0$ in $F(\Omega)$ (Satz II.3.9), folgt damit $L(u) = 0$.

Sei nun $u \in F(\Omega)$ beliebig. Die Stetigkeit von L impliziert die Existenz von $\varphi \in \mathcal{D}_{(\omega)}(\Omega)$, und $j \in \mathbb{N}$ so, daß für jedes $u \in F(\Omega)$

$$|L(u)| \leq \|\varphi u\|_{p_j,k_j}$$

gilt. Setze $K := \operatorname{supp}\varphi$. Sei $v \in F(\Omega)$ mit $\operatorname{supp} v \cap K = \emptyset$ ($\Rightarrow L(v) = 0$) und $\psi \in \mathcal{D}_{(\omega)}(\Omega)$ mit $\psi \equiv 1$ in $K \cup \operatorname{supp}\mu$. Dann gilt für jedes $u \in F(\Omega)$:

$$L((1-\psi)u) = 0$$

und nach dem oben Gezeigten

$$L(\psi u) = 0, \text{ falls } P(D)\,u = 0 \text{ gilt.}$$

Daraus folgt dann:

$$\forall u \in F(\Omega) : L(u) = 0$$

und damit die Behauptung mit dem Satz von Hahn-Banach.

SATZ 2.8. *Ist $f \in \mathcal{E}'_{(\omega)}$, so hat die Gleichung $P(D)\,u = f$ hat eine Lösung $u \in \mathcal{E}'_{(\omega)}$ genau dann, wenn $\frac{\hat{f}}{P} \in A(\ ^N)$ gilt.*

BEWEIS. „$\Rightarrow$“: Nach Voraussetzung gilt $P(D)\,u = f$ und damit $P\hat{u} = \hat{f}$. Da $\hat{u}$ nach Satz I.6.9 holomorph ist, folgt $\frac{\hat{f}}{P} = \hat{u} \in A(\ ^N)$.

„$\Leftarrow$“: Lemma 2.6 mit P statt $\check{P}$.

Satz 2.9. *Seien $\Omega_1 \subset \Omega_2$ offen. Setze*

$$N_i := \{u \in F(\Omega_i) \mid P(D)\,u = 0\}; \quad i = 1, 2$$

und

$$N_2' := \{u|_{\Omega_1} \mid u \in N_2\}.$$

Falls für jedes $u \in \mathcal{E}'_{(\omega)}$ mit $\operatorname{supp} u \subseteq \overline{\Omega}_2$ *und* $\operatorname{supp} \check{P}(D)\,u \subseteq \Omega_1$ *bereits*

$$\operatorname{supp} u \subseteq \Omega_1$$

gilt, ist N_2' dicht in N_1 in der von $F(\Omega_1)$ induzierten Topologie.

Beweis. Sei $L \in F'(\Omega_1)$ mit $L(N_2') = \{0\}$(d.h. $L \perp N_2'$). Aus Satz II.3.3 und Satz II.3.7 folgt $L|_{\mathcal{E}_{(\omega)}(\Omega_1)} =: v \in \mathcal{E}'_{(\omega)}(\Omega_1)$. Zeige die Existenz von $\mu \in \mathcal{E}'_{(\omega)}(\Omega_1)$ mit:

$$\check{P}(D)\,\mu = v. \tag{2-5}$$

Da $E_P \subseteq N_2'$ ist, folgt für jedes $u \in E_P$: $v(u) = 0$. Daher folgt aus den Lemmata 2.4 und 2.6 die Existenz eines $\mu \in \mathcal{E}'_{(\omega)}$ mit $\check{P}(D)\,\mu = v$. Wenn

$$\operatorname{supp} \mu \subseteq \overline{\Omega}_2 \tag{2-6}$$

gezeigt ist, folgt daraus (2-5) mit der Satzvoraussetzung.

Für eine Fundamentallösung E von $\check{P}(D)$ gilt $\mu = E * v$. Für beliebiges $\psi \in \mathcal{D}_{(\omega)}(\mathbb{R}^N \setminus \overline{\Omega}_2)$ hat man:

$$\mu(\psi) = \mu * \check{\psi}(0) = E * v * \check{\psi}(0) = v * E * \check{\psi}(0) = v(\check{E} * \psi).$$

Ferner gilt: $\check{P}(D)(\check{E} * \psi) = \psi = 0$ in Ω_2, da $\check{E}$ eine Fundamentallösung von $P(D)$ ist. Wegen $\check{E} * \psi \in \mathcal{E}_{(\omega)}$ kann man

$$\check{E} * \psi|_{\Omega_1} \in N_2' \Rightarrow v(\check{E} * \psi) = 0 \Rightarrow (2-6)$$

folgern. Aus (2-5) erhält man dann für jedes $u \in \mathcal{E}_{(\omega)}(\Omega_1)$ mit $P(D)\,u = 0$ auf einer Umgebung von $\operatorname{supp} \mu$:

$$L(u) = v(u) = \check{P}(D)\,\mu(u) = \mu(P(D)\,u) = \mu(0) = 0.$$

Dann folgt die Behauptung wie im Beweis von Satz 2.7.

3. $P(D)\,u = f$ mit $f \in F(\Omega)$

Die wichtigsten Ergebnisse dieses Abschnittes sind die Sätze 3.3 und 3.6, die zusammen die Surjektivität von $P(D) : F_P(\Omega) \to F(\Omega)$ vollständig charakterisieren: $P(D)\,u = f$ hat für jedes $f \in F(\Omega)$ eine Lösung $u \in F_P(\Omega)$ genau dann, wenn Ω P-konvex im Sinne von Definition 3.1 ist.

Als Korollar folgt dann direkt die Surjektivität auf $\mathcal{E}_{(\omega)}(\Omega)$ und $\mathcal{D}'_{(\omega)F}(\Omega)$ für P-konvexes Ω (auf $\mathcal{D}'_{(\omega)F}$ nur für subadditive Gewichtsfunktionen).

Definition 3.1. *Eine offene Menge $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ heißt* P-konvex für Träger *(kurz:* P-konvex*), wenn für jedes $K \quad \Omega$ ein $K' \quad \Omega$ existiert so, daß für jedes $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$ mit* $\operatorname{supp} \check{P}(D)\,\varphi \subseteq K$ *schon* $\operatorname{supp} \psi \subseteq K'$ *gilt.*

Da offensichtlich der $\mathbb{R}^N$ für jedes P P-konvex und die P-Konvexität schnittstabil ist, gibt es zu jeder Menge Ω eine kleinste P-konvexe Menge Ω'. Aus dem „Theorem of supports“ folgt sofort, daß jede konvexe offene Menge P-konvex ist.

Bemerkung 3.2. Eine offene Menge Ω ist P-konvex, wenn es zu jedem Kompaktum $K \quad \Omega$ ein Kompaktum $K' \quad \Omega$ gibt so, daß für jedes

(1) $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$
(2) $\varphi \in \mathcal{D}_{(\omega)}(\Omega)$
(3) $\varphi \in \mathcal{E}'_{(\omega)}(\Omega)$

mit $\operatorname{supp} \check{P}(D)\,\varphi \subseteq K$ bereits $\operatorname{supp}\varphi \subseteq K'$ gilt.

Beweis. „(3) $\Rightarrow$(1)$\Rightarrow$(2):“ klar, da $\mathcal{E}'_{(\omega)} \supseteq C_c^\infty \supseteq \mathcal{D}_{(\omega)}$ gilt.

„(2) $\Rightarrow$(3):“ Sei $\varphi \in \mathcal{E}'_{(\omega)}(\Omega)$ mit $\operatorname{supp} \check{P}(D)\,\varphi \subseteq K$ beliebig gegeben. Dann gibt es ein $\varepsilon_1 > 0$ mit $K_{\varepsilon_1} := \overline{K + B_{\varepsilon_1}} \quad \Omega$. Sei $K'_{\varepsilon_1} \quad \Omega$ gemäß (2) gewählt. Für jedes $\varepsilon < \varepsilon_1$ gilt dann $\varphi_\varepsilon := \varphi * \phi_\varepsilon \in \mathcal{D}_{(\omega)}(K'_{\varepsilon_1})$ (mit ϕ_ε wie in Satz I.5.5), weil

$$\operatorname{supp} \check{P}(D)\,\varphi_\varepsilon = \operatorname{supp}(\check{P}(D)\,\varphi) * \phi_\varepsilon \overset{\text{I.5.2}}{\subseteq} K + B_\varepsilon \subseteq K_{\varepsilon_1}$$

und daher wegen (2) $\operatorname{supp}\varphi_\varepsilon \subseteq K'_{\varepsilon_1}$ gilt. Wähle $\varepsilon_2 > 0$ so, daß

$$K' := \overline{K'_{\varepsilon_1} + B_{\varepsilon_2}} \quad \Omega$$

gilt.

Zeige: $\operatorname{supp}\varphi \subseteq K'$. Angenommen, es gibt $x \in \Omega \setminus K'$ und $f \in \mathcal{D}_{(\omega)}(B_\delta(x))$ mit $\varphi(f) > 0$. Da $\varphi_\varepsilon \to \varphi$ in $\mathcal{D}'_{(\omega)}(\Omega)$ gilt (Satz I.5.5), existiert ein $\varepsilon_3 > 0$ so, daß für jedes $0 < \varepsilon < \varepsilon_3$

$$\varphi_\varepsilon(f) > 0$$

gilt. Dies bedeutet $x \in \operatorname{supp}\varphi_\varepsilon$ für jedes $\varepsilon < \min_{i=1}^3(\varepsilon_i)$, aber $\operatorname{supp}\varphi_\varepsilon \subseteq K'_{\varepsilon_1} \subseteq K'$ und deswegen $x \in K'$.   zur Annahme.

Also gilt $\operatorname{supp}\varphi \subseteq K'$.

Satz 3.3. *Falls für eine offene Menge Ω die Gleichung*

$$P(D)\,u = f \tag{3-1}$$

eine Lösung $u \in \mathcal{D}'_{(\omega)}(\Omega)$ für jedes $f \in \mathcal{E}_{(\omega)}(\Omega)$ hat, gilt:

$$\Omega \text{ ist } P\text{−konvex.}$$

Beweis. Sei $K \quad \Omega$ fixiert. Betrachte die Bilinearform

$$B : \Phi \times \mathcal{E}_{(\omega)}(\Omega) \to \quad : (\varphi, f) \mapsto \int_{\mathbb{R}^N} \varphi f \, dx,$$

wobei

$$\Phi := \{\varphi \in \mathcal{D}_{(\omega)}(\Omega) \mid \operatorname{supp} \check{P}(D)\,\varphi \subseteq K\}$$

mit den Halbnormen

$$(\varphi \mapsto \|\,\check{P}(D)\,\varphi\|_\lambda)_{\lambda>0}$$

ausgestattet ist. Dann ist B in f stetig für festes $\varphi \in \Phi$, da φ kompakten Träger hat und $\check{P}(D)$ stetig ist.
Sei f fixiert. Nach Voraussetzung existiert dann ein $u \in \mathcal{D}'_{(\omega)}(\Omega)$ mit $P(D)\,u = f$. Dann gilt:

$$B(\varphi, f) = \int_{\mathbb{R}^N} \varphi f \, dx = \langle \varphi, f \rangle = \langle \varphi, P(D)\,u \rangle = \langle \check{P}(D)\,\varphi, u \rangle.$$

Damit ist B als in φ stetig für festes f nachgewiesen. Da Φ und $\mathcal{E}_{(\omega)}$ metrisierbar (und $\mathcal{E}_{(\omega)}$ Fréchet) sind, ist B stetig (Lemma II.3.12), d.h. es gibt $\lambda_1, \lambda_2, C > 0, \psi \in \mathcal{D}_{(\omega)}(\Omega)$ mit

$$\forall (\varphi, f) \in \Phi \times \mathcal{E}_{(\omega)}(\Omega) \ : \ |B(\varphi, f)| \leq C \| \, \check{P}(D)\,\varphi \|_{\lambda_1} \, \| \psi f \|_{\lambda_2}.$$

Speziell folgt daraus $\operatorname{supp} \varphi \subseteq \operatorname{supp} \psi$ und mit $K' := \operatorname{supp} \psi$ die Behauptung.

Satz 3.4. *Ω ist P-konvex genau dann, wenn für jedes $u \in \mathcal{E}'_{(\omega)}(\Omega)$:*

$$\operatorname{dist}(\mathbb{R}^N \setminus \Omega, \operatorname{supp} u) = \operatorname{dist}(\mathbb{R}^N \setminus \Omega, \operatorname{supp} \check{P}(D)\,u)$$

gilt.

Beweis. Für $\Omega = \mathbb{R}^N$ ist die Bedingung immer erfüllt. Da $\mathbb{R}^N$ konvex und P-konvex ist, ist hier nichts zu zeigen. Im Folgenden sei daher o.B.d.A. $\Omega \subset \mathbb{R}^N$. „$\Leftarrow$“: Sei K kompakt in Ω. Da Ω offen ist, gilt:

$$\delta := \operatorname{dist}(\mathbb{R}^N \setminus \Omega, K) > 0.$$

Die Menge $F := \{ x \mid \operatorname{dist}(\mathbb{R}^N \setminus \Omega, x) \geq \delta \}$ ist offenbar abgeschlossen. Sei nun $u \in \mathcal{E}'_{(\omega)}$ mit $\operatorname{supp} \check{P}(D)\,u \subseteq K$ beliebig. Dann gilt

$$\operatorname{supp} u \subseteq F \cap ch(K) =: K'$$

mit kompaktem K', da aus dem „Theorem of Supports“ folgt

$$\operatorname{supp} u \subseteq \operatorname{ch} \operatorname{supp} u = \operatorname{ch} \operatorname{supp} \check{P}(D)\,u \subset \operatorname{ch} K.$$

Für $x \in \operatorname{supp} u$ gilt:

$$\begin{aligned} \operatorname{dist}(\mathbb{R}^N \setminus \Omega, x) &\geq \operatorname{dist}(\mathbb{R}^N \setminus \Omega, \operatorname{supp} u) = \operatorname{dist}(\mathbb{R}^N \setminus \Omega, \operatorname{supp} \check{P}(D)\,u) \\ &\geq \operatorname{dist}(\mathbb{R}^N \setminus \Omega, K) = \delta \end{aligned}$$

d.h. $x \in F$.

„$\Rightarrow$“: Da $\operatorname{supp} \check{P}(D)\,u \subseteq \operatorname{supp} u$ und damit immer

$$\operatorname{dist}(\mathbb{R}^N \setminus \Omega, \operatorname{supp} u) \leq \operatorname{dist}(\mathbb{R}^N \setminus \Omega, \operatorname{supp} \check{P}(D)\,u)$$

immer gilt (Satz I.5.2), bleibt nur die andere Ungleichung zu zeigen. Sei $u \in \mathcal{E}'_{(\omega)}$. Setze $\delta := \operatorname{dist}(\mathbb{R}^N \setminus \Omega, \operatorname{supp} u)$ und definiere für jedes $a \in \mathbb{R}^N$ mit $|a| < \delta : u_a := u \circ \tau_a$, d.h. $u_a(f) = u_x(f(x+a))$. Dann gibt es für jedes Kompaktum $K \quad \Omega$ ein $|a| < \delta$ mit

$$\operatorname{supp} u_a \not\subseteq K$$

und ein $|\tilde{a}| < \delta$ mit

$$\operatorname{supp} \check{P}(D)\,u_a \setminus K \neq \emptyset. \tag{3-2}$$

Denn zu jedem $\varepsilon > 0$ existieren $x \in \mathbb{R}^N \setminus \Omega$ und $y \in \operatorname{supp} u$ mit $|x - y| < \delta + \varepsilon$. Wähle ε so, daß $\delta\varepsilon + \varepsilon^2 < \min(\operatorname{dist}(\mathbb{R}^N \setminus \Omega, K), \delta)$ gilt. Für $a := (1 - \varepsilon)|x - y|$ gilt dann

$$|a| = (1 - \varepsilon)(\delta + \varepsilon) < \delta$$

und mit $z := y + a \in \operatorname{supp} u_a$

$$|x - z| = |x - y - a| = \varepsilon|x - y| < \operatorname{dist}(\mathbb{R}^N \setminus \Omega, K),$$

d.h. $\operatorname{dist}(\mathbb{R}^N \setminus \Omega, \operatorname{supp} u_a) < \operatorname{dist}(\mathbb{R}^N \setminus \Omega, K)$ und damit

$$\operatorname{supp} u_a \nsubseteq K.$$

Angenommen es gibt ein K so, daß für jedes $|\tilde{a}| < \delta$: $\operatorname{supp} \check{P}(D)\, u_a \subseteq K$ gilt. Dann folgt aus der P-Konvexität (und der Bemerkung 3.2) die Existenz eines Kompaktums K' so, daß für jedes $|a| < \delta$ $\operatorname{supp} u_a \subseteq K'$ gilt. .

Aus (3-2) folgt dann:

$$\operatorname{dist}(\operatorname{supp} \check{P}(D)\, u, \mathbb{R}^N \setminus \Omega) \leq \delta.$$

In Satz 3.4 kann $\mathcal{E}'_{(\omega)}(\Omega)$ auch durch $\mathcal{D}_{(\omega)}(\Omega)$ oder $C_c^\infty(\Omega)$ ersetzt werden.

Lemma 3.5. Sei Ω P-konvex, $f \in F(\Omega)$. Die Topologie von F sei gegeben durch die Halbnormen $(\|\varphi_n \cdot \|_{p_m,k_m})_{n,m\in\mathbb{N}}$ mit $\operatorname{supp} \varphi_n \nearrow\!\!\nearrow \Omega$ und $\varphi_{n+2} \equiv 1$ auf $\Omega_{n+1} := \operatorname{supp} \varphi_{n+1}$.

Sei $n \in \mathbb{N}$ beliebig, sowie $f \equiv 0$ in Ω_n. Dann gibt es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $u \in F_P(\Omega)$ mit $P(D)\, u = f$ in Ω_{n+1} und $\|\varphi_l u\|_{p_j, \check{P}k_j} < \varepsilon$, $1 \leq l, j \leq n$.

Beweis. O.B.d.A. kann man $f \in \mathcal{E}'_{(\omega)}$ annehmen, da Werte außerhalb Ω_{n+2} nicht benutzt werden (andernfalls ersetze f durch $\varphi_{n+2} f$). Aus Satz 1.3 folgt die Existenz eines $v \in F_P(\mathbb{R}^N)$ mit $P(D)\, v = f$. Nach Voraussetzung gilt $P(D)\, v \equiv 0$ in Ω_n. Aus Satz 2.9 (mit $\Omega_1 := \Omega_n$ und $\Omega_2 := \Omega_{n+2}$) erhält man ein $w \in F_P(\Omega_{n+2})$ mit $P(D)\, w = 0$ in Ω_{n+2} und $\|\varphi_l(v - w)\|_{p_j, \check{P}k_j} < \varepsilon$, $1 \leq l, j \leq n$. $u := v - \varphi_{n+2} w$ hat dann alle gewünschten Eigenschaften.

Satz 3.6. *Ist Ω P-konvex, so gibt es zu jedem $f \in F(\Omega)$ ein $u \in F_P(\Omega)$ mit $P(D)(u) = f$*

Beweis. Für jedes $n \in \mathbb{N}$ setzte

$$\Omega_n := \{x \in \Omega \mid |x| \leq n, \operatorname{dist}(\mathbb{R}^N \setminus \Omega, x) \geq \frac{1}{n}\}.$$

Offensichtlich gilt $\Omega_n \nearrow\!\!\nearrow \Omega$. Sei $u \in \mathcal{E}'_{(\omega)}(\Omega)$ mit $\operatorname{supp}(\check{P}(D)\, u) \subseteq \Omega_n$ beliebig. Da Ω P-konvex ist, folgt mit Satz 3.4

$$\operatorname{dist}(\operatorname{supp} \check{P}(D)(u), \mathbb{R}^N \setminus \Omega) = \operatorname{dist}(\operatorname{supp} u, \mathbb{R}^N \setminus \Omega). \tag{3-3}$$

Aus dem „Theorem of Supports“ folgt:

$$\operatorname{ch} \operatorname{supp} \check{P}(D)(u) = \operatorname{ch} \operatorname{supp} u. \tag{3-4}$$

Zeige: $\operatorname{supp} u \subseteq \Omega_n$.

Sei $x \in \operatorname{supp} u \Rightarrow x \in \operatorname{ch}\operatorname{supp} u = \operatorname{ch}\operatorname{supp} \check{P}(D)\,u \subseteq \operatorname{ch}\Omega_n$
$\Rightarrow |x| \leq n.$

Andererseits gilt:

$$\begin{aligned}
\operatorname{dist}(\mathbb{R}^N \setminus \Omega, x) &\geq \operatorname{dist}(\mathbb{R}^N \setminus \Omega, \operatorname{supp} u) \\
&= \operatorname{dist}(\mathbb{R}^N \setminus \Omega, \operatorname{supp} \check{P}(D)\,u) \\
&> \operatorname{dist}(\mathbb{R}^N \setminus \Omega, \Omega_n), \text{ da } \Omega_n \text{ offen und } \operatorname{supp} \check{P}(D)\,u \quad \Omega_n \text{ gilt.} \\
&\geq \tfrac{1}{n}.
\end{aligned}$$

Zusammen ergibt sich daher: $x \in \Omega_n$.

Sei $\varphi_n \equiv 1$ auf einer Umgebung von $\overline{\Omega}_{n-1}$, $\varphi_n \in \mathcal{D}_{(\omega)}(\Omega_n)$. Die Halbnormen $(\|\varphi_n \cdot\|_{p_m,k_m})_{m,n\in\mathbb{N}}$ erzeugen die Topologie von $F_P(\Omega)$. Mit Induktion wird gezeigt:

$$\forall n \in \mathbb{N} \exists u_n \in F(\Omega) \text{ mit } P(D)\,u_n = f \text{ in } \Omega_n$$

und

$$\|\varphi_N(u_{n+1} - u_n)\|_{p_j,\check{P}k_j} < 2^{-n}, 1 \leq N, j \leq n.$$

Die Existenz von u_1 folgt aus Satz 1.3. Um u_{n+1} zu erhalten, setzt man zunächst $u_{n+1} = \tilde{u} + u_n$, wobei $P(D)\,\tilde{u} = f - P(D)\,u_n$ in Ω_{n+1}. Die Existenz von $\tilde{u}$ folgt mit $\varepsilon = 2^{-n}$ einschließlich der geforderten Abschätzungen aus Lemma 3.5.

Nach Konstruktion der u_n gilt

$$u_n \to u \text{ in } F(\Omega) \text{ und } P(D)\,u = f.$$

Korollar 3.7. *Wenn Ω P-konvex ist, hat die Gleichung* (3-1) *für jedes $f \in \mathcal{E}_{(\omega)}(\Omega)$ eine Lösung $u \in \mathcal{E}_{(\omega)}(\Omega)$.*

Beweis. Direkte Folgerung aus Satz 3.6 und Satz II.3.7.

Korollar 3.8. *Wenn Ω P-konvex und $\omega \in \mathcal{M}$ ist, so hat die Gleichung* (3-1) *für jedes $f \in \mathcal{D}'_{(\omega)F}(\Omega)$ eine Lösung $u \in \mathcal{D}'_{(\omega)F}(\Omega)$.*

Beweis. Folge von Satz 3.6 und Satz II.3.8, da für $\omega \in \mathcal{M}$ die Räume $\mathrm{B}^{\omega,loc}_{p,\exp(\lambda\omega)}$ und $\mathrm{B}^{\omega,loc}_{p,\check{P}\exp(\lambda\omega)}$ mit $\lambda < 0$ Fréchеträume sind (Bemerkung nach Satz II.1.5, Lemma II.1.7 und Satz II.3.3) und daher $F(\Omega) := \mathrm{B}^{\omega,loc}_{p,\exp(\lambda\omega)}(\Omega)$ zulässig ist.

4. $P(D)\,u = f$ mit $f \in \mathcal{D}'_{(\omega)}(\Omega)$

Aufbauend auf den Ergebnissen der letzten Abschnitte wird hier die Surjektivität von $P(D) : \mathcal{D}'_{(\omega)}(\Omega) \to \mathcal{D}'_{(\omega)}(\Omega)$ untersucht. Als Ergebnis ergibt sich, daß $P(D)$ genau dann surjektiv ist, wenn Ω strikt (P,ω)-konvex ist. Im Gegensatz zu dem letzten Abschnitt hängt die Lösbarkeit nicht nur von Ω und P ab, sondern auch von der zugrunde liegenden Gewichtsfunktion ω.

Definition 4.1. *Sei* $\omega \in \mathcal{M}'$. *Eine offene Teilmenge* Ω *von* $\mathbb{R}^N$ *heißt* P-konvex für $\operatorname{sing}_\omega \operatorname{supp}$, *falls es für jedes* $K \quad \Omega$ *ein* $K' \quad \Omega$ *gibt so, daß für jedes* $\mu \in \mathcal{E}'(\Omega)$ *gilt:*

$$\operatorname{sing}_\omega \operatorname{supp} \check{P}(D)\, \mu \subseteq K \Rightarrow \operatorname{sing}_\omega \operatorname{supp} \mu \subseteq K'. \tag{4-1}$$

Ω *heißt* strikt (P, ω)-konvex, *falls* Ω P*-konvex und* P*-konvex für* $\operatorname{sing}_\omega \operatorname{supp}$ *ist.*

Eine offene Teilmenge Ω *von* $\mathbb{R}^N$ *heißt* P-konvex für $\operatorname{sing}_\omega \operatorname{supp}$ mit $\mathcal{E}'_{(\omega)}$, *falls es für jedes* $K \quad \Omega$ *ein* $K' \quad \Omega$ *gibt so, daß* (4-1) *für jedes* $\mu \in \mathcal{E}'_{(\omega)}(\Omega)$ *gilt.*

Wie man später sehen wird, fallen die Begriffe P-konvex für $\operatorname{sing}_\omega \operatorname{supp}$ und P-konvex für $\operatorname{sing}_\omega \operatorname{supp}$ mit $\mathcal{E}'_{(\omega)}$ zusammen.

Man kann in 4.1 natürlich auch statt $\mathcal{E}'(\Omega)$ $(\mathcal{E}'_{(\omega)}(\Omega))$ die Menge aller $u \in \mathcal{E}'$ $(\mathcal{E}'_{(\omega)})$ mit $\operatorname{sing}_\omega \operatorname{supp} \subseteq \Omega$ nehmen. Denn für $u \in \mathcal{E}'$ $(\mathcal{E}'_{(\omega)})$ mit $\operatorname{sing}_\omega \operatorname{supp} \subseteq \Omega$ gibt es ein $\phi \in \mathcal{D}_{(\omega)}(\Omega)$ mit $\phi \equiv 1$ auf einer Umgebung von $\operatorname{sing}_\omega \operatorname{supp} u$. Dann ist $\operatorname{sing}_\omega \operatorname{supp} \phi u = \operatorname{sing}_\omega \operatorname{supp} u$, $\operatorname{sing}_\omega \operatorname{supp} \check{P}(D)\, \phi u = \operatorname{sing}_\omega \operatorname{supp} \check{P}(D)\, u$ und $\phi u \in \mathcal{E}'(\Omega)$ $(\mathcal{E}'_{(\omega)}(\Omega))$.

Wie bei der P-Konvexität gilt auch hier, daß es zu jeder Menge Ω eine kleinste strikt (P, ω)-konvexe (P-konvex für $\operatorname{sing}_\omega \operatorname{supp}$) Menge $\Omega' \supseteq \Omega$ gibt.

Satz 4.2. *Für* $\mu \in \mathcal{E}'(\Omega)$ *gilt:*

$$\operatorname{ch} \operatorname{sing}_\omega \operatorname{supp} \check{P}(D)\, \mu = \operatorname{ch} \operatorname{sing}_\omega \operatorname{supp} \mu.$$

Speziell gilt daher: Jede konvexe Menge ist P*-konvex für* $\operatorname{sing}_\omega \operatorname{supp}$.

Beweis. Wegen

$$\operatorname{sing}_\omega \operatorname{supp} \check{P}(D)\, \mu \subseteq \operatorname{sing}_\omega \operatorname{supp} \mu$$

reicht es, die umgekehrte Inklusion zu zeigen. Sei o.B.d.A. $\omega(0) = 1$ und $\omega' \leq C$ wie in Satz I.2.4. Setze

$$K := \operatorname{ch} \operatorname{sing}_\omega \operatorname{supp} \check{P}(D)\, \mu \text{ und } H := H_K.$$

Nach Satz I.7.7 gibt es zu jedem $m \in \mathbb{N}$ ein $C_m > 0$ so, daß $\forall y$ mit $|y| < m\omega(x)$

$$|\widehat{\check{P}(D)\, \mu}(x + iy)| \leq C_m (1 + |x|)^\lambda e^{H(y) + \frac{|y|}{m}} \tag{4-2}$$

gilt. Setze $v := \check{P}(D)\, \mu$. Dann folgt mit (2-4) $(F = \hat{\mu} = \frac{\hat{v}}{\check{P}})$

$$\forall z \in {}^N : |\hat{\mu}|(z) \leq C \sup_{t \in B_1^N} |\check{P}\hat{\mu}|(z + t)$$

und damit

$$|\hat{\mu}(x + iy)| \leq C \sup_{z \in B_1} |\check{P}\hat{\mu}|(x + iy + z).$$

Sei $|z| \leq 1$ beliebig. Für $x, y \in \mathbb{R}^N$ mit $|y| \leq m\omega(x)$ gilt:

$$|y + \operatorname{Im} z| \leq |y| + 1 \leq m\omega(x) + 1 \leq (m + 1)\omega(x).$$

Da $\omega' \leq C$ ist, gilt: $\omega(x + \operatorname{Re} z) \geq \omega(x) - C$. Dies impliziert:

$$|y + \operatorname{Im} z| \leq (m + 1)(C + 1)\omega(x + \operatorname{Re} z).$$

Daher kann wie folgt abgeschätzt werden:

$$\begin{aligned}
|\check{P}\hat{\mu}|(x+iy+z) &\overset{(4\text{-}2)}{\leq} C_{(m+1)(1+C)}(1+|x+\operatorname{Re} z|)^{\lambda} e^{H(y+\operatorname{Im} z)+\frac{|y+\operatorname{Im} z|}{m}} \\
&\leq C_{(m+1)(1+C)}(1+|x|)^{\lambda} \underbrace{(1+|\operatorname{Re} z|)^{\lambda}}_{\leq C \text{ da } |z|\leq 1} e^{H(y)+\frac{|y|}{m}} \underbrace{e^{H(\operatorname{Im} z)+\frac{|\operatorname{Im} z|}{m}}}_{\leq C \text{ da } |z|\leq 1} \\
&\leq D_m(1+|x|)^{\lambda} e^{H(y)+\frac{|y|}{m}}.
\end{aligned}$$

Deswegen gilt:

$$|\hat{\mu}|(x+iy) \leq C D_m (1+|x|)^{\lambda} e^{H(y)+\frac{|y|}{m}}.$$

Nach Satz I.7.7 folgt daraus $\operatorname{sing}_\omega \operatorname{supp} \mu \subseteq \operatorname{ch} K$.

Satz 4.3. *Ω ist P-konvex für* $\operatorname{sing}_\omega \operatorname{supp}$ *genau dann, wenn für jedes $\mu \in \mathcal{E}'(\Omega)$*

$$\operatorname{dist}(\mathbb{R}^N \setminus \Omega, \operatorname{sing}_\omega \operatorname{supp} \mu) = \operatorname{dist}(\mathbb{R}^N \setminus \Omega, \operatorname{sing}_\omega \operatorname{supp} \check{P}(D)\,\mu)$$

gilt.

Beweis. Mit der Bemerkung nach 4.1 kann man den Beweis analog dem von Satz 3.4 führen, wobei das „Theorem of Supports“ durch Satz 4.2 ersetzt werden muß.

Lemma 4.4. Für jedes $\omega \in \mathcal{M}'$ und $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ offen, ist $\mathcal{D}_{(\omega)}(\Omega)$ separabel.

Beweis. Zeige zunächst: $\mathcal{D}_{(\omega)}(K)$ ist separabel für jedes $K \quad \Omega$. Da $C(K)$ nach dem Satz von Stone-Weierstraß ([**MV**] 4.15) separabel ist, ist $C_c(K)$ ebenfalls separabel. Daher ist

$$E := \mathop{\times}_{n\in\mathbb{N}} \{\hat{f} e^{n\omega} \mid f \in C_c(K)\}$$

metrisch und separabel. Da $\iota : \mathcal{D}_{(\omega)}(K) \to E : f \mapsto (\hat{f} e^{n\omega})_{n\in\mathbb{N}}$ ein Isomorphismus auf $\operatorname{Bild} \iota$ mit abgeschlossenem Wertebereich ist, folgt die Separabilität von $\mathcal{D}_{(\omega)}(K)$.

Für eine kompakte Ausschöpfung $K_n \nearrow\!\!\nearrow \Omega$ existieren daher abzählbare dichte Mengen M_n die in $\mathcal{D}_{(\omega)}(K_n)$ dicht sind. Definiere

$$M := \bigcup_{n\in\mathbb{N}} M_n.$$

Sei $f \in \mathcal{D}_{(\omega)}(\Omega)$ beliebig. Da $\mathcal{D}_{(\omega)}(\Omega) = \operatorname*{ind}_{n\to\infty} \mathcal{D}_{(\omega)}(K_n)$ ist, gibt es ein $n \in \mathbb{N}$ mit $f \in \mathcal{D}_{(\omega)}(K_n)$. Daher gibt es eine Folge $(f_m)_{m\in\mathbb{N}}$ in $M_n \subseteq M$ mit $f_m \to f$ in $\mathcal{D}_{(\omega)}(K_n)$. Wegen einer universellen Eigenschaft des induktiven Limes gilt dann $f_m \to f$ in $\mathcal{D}_{(\omega)}(\Omega)$.

Satz 4.5. *Wenn Ω P-konvex für* $\operatorname{sing}_\omega \operatorname{supp}$ *ist, induziert $P(D)$ eine surjektive Abbildung auf* $\mathcal{D}'_{(\omega)} / \mathcal{E}_{(\omega)}(\Omega)$.

Beweis. Es reicht zu zeigen, daß es für jedes $f \in \mathcal{D}'_{(\omega)}(\Omega)$ eine stetige Halbnorm q auf $\mathcal{D}_{(\omega)}(\Omega)$ und eine Folge $\psi_r \in \mathcal{D}_{(\omega)}(\Omega)$ gibt, so daß es für jedes $K \quad \Omega$ nur endlich viele $r \in \mathbb{N}$ gibt mit $\operatorname{supp} \psi_r \cap K \neq \emptyset$ und daß für jedes $v \in \mathcal{D}_{(\omega)}(\Omega)$

$$|f(v)| \leq C\Big(q(\check{P}(D)\,v) + \sum_{r\in\mathbb{N}} |\langle v, \psi_r\rangle|\Big) \tag{4-3}$$

gilt. Denn: setze

$$V := \{(\check{P}(D)\, v, (\langle v, \psi_n\rangle)_{n\in\mathbb{N}}) \in \mathcal{D}_{(\omega)}(\Omega) \times \ell_1 \mid v \in \mathcal{D}_{(\omega)}(\Omega)\},$$

$$\phi : V \to \quad : (x(v), y(v)) \mapsto f(v).$$

Dann ist ϕ wohldefiniert, da $(\operatorname{supp}\psi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine lokalendliche Überdeckung von Ω bilden und, da für v, $w \in \mathcal{D}_{(\omega)}(\Omega)$ mit $x(v) = x(w)$, $y(v) = y(w)$ aus der Linearität und (4-3) $f(v) = f(w)$ folgt. Offensichtlich ist ϕ linear, und es gilt:

$$\begin{aligned} |\phi(x,y)| = |f(v)| &\le C\Big(q(\check{P}(D)\, v) + \sum_{n\in\mathbb{N}} |\langle v, \psi_n\rangle|\Big) \\ &= C\Big(q(x) + \sum_{n\in\mathbb{N}} |y_n|\Big). \end{aligned} \tag{4-4}$$

Da V ein linearer Unterraum von $\mathcal{D}_{(\omega)}(\Omega) \times \ell_1$ ist, kann man nach dem Satz von Hahn-Banach ϕ zu einem stetigen Funktional Φ auf $\mathcal{D}_{(\omega)}(\Omega) \times \ell_1$ fortsetzen. Dann gilt $\Phi \in (\mathcal{D}_{(\omega)}(\Omega) \times \ell_1)' = \mathcal{D}'_{(\omega)}(\Omega) \oplus \ell_\infty = \mathcal{D}'_{(\omega)}(\Omega) \times \ell_\infty$, d.h. es existieren u und $a \in \ell_\infty$ mit

$$\Phi(v, x) = u(v) + \sum_{n\in\mathbb{N}} x_n a_n$$

und

$$\Phi\Big(\check{P}(D)\, v, (\langle v, \psi_n\rangle)_{n\in\mathbb{N}}\Big) = f(v) = u(\check{P}(D)\, v) + \sum_{n\in\mathbb{N}} a_n \langle v, \psi_n\rangle.$$

Da die $\operatorname{supp}\psi_n$ lokalendlich waren, ist $g := \sum_{n\in\mathbb{N}} a_n\psi_n \in \mathcal{E}_{(\omega)}(\Omega)$. Damit gilt dann:

$$f(v) - u(\check{P}(D)\, v) = f(v) - (P(D)\, u)(v) = g(v)$$

$$\iff f - P(D)\, u = g.$$

Aus technischen Gründen wird statt (4-3) eine stärkere Aussage gezeigt: Für jedes $v \in \mathcal{D}_{(\omega)}(\Omega)$ gilt:

$$|f(v)| + \|v\|_{L_\infty} \le C\Big(q(\check{P}(D)\, v) + \sum_{n\in\mathbb{N}} |\langle v, \psi_n\rangle|\Big). \tag{4-5}$$

Wähle eine kompakte Ausschöpfung $\tilde{K}_n \nearrow\!\!\!\nearrow \Omega$ und dazu $\tilde{K}'_n$ gemäß Definition 4.1. Setze $K_0 := K'_0 := K_{-1} := K'_{-1} := K_{-2} := K'_{-2} := \emptyset$, und für $n > 0$ wähle dann induktiv $K'_n = \tilde{K}'_{j_n}$ so, daß

$$K'_n \supseteq \mathring{K}'_{n-1} \supseteq K_{n-1}$$

gilt (das ist möglich, da $\tilde{K}'_n \supseteq \tilde{K}_n$ und $\tilde{K}_n \nearrow\!\!\!\nearrow \Omega$). Zeige per Induktion: Für jedes $l \in \mathbb{N}_0$ gilt $(*)$:

$$\left.\begin{array}{l} \forall \varepsilon > 0 \\ \qquad \exists q_l \text{ stetige Halbnorm auf } \mathcal{D}_{(\omega)}(\Omega) \\ \qquad \text{mit } q_l|_{\mathcal{D}_{(\omega)}(K_{l-2})} = q_{l-1}|_{\mathcal{D}_{(\omega)}(K_{l-2})} \\ \qquad \exists n_l \in \mathbb{N} \text{ und } \psi_1^{(l)} \ldots \psi_{n_l}^{(l)} \in \mathcal{D}_{(\omega)}(\Omega \setminus K'_{l-2}) \\ \qquad \text{und (4-5) gilt mit } C_l := C_{l-1}(1+\varepsilon) \text{ für alle } v \in \mathcal{D}_{(\omega)}(K'_l) \end{array}\right\} \quad (*)$$

Für $l = 0$ ist wegen $\mathcal{D}_{(\omega)}(\emptyset) = \{0\}$ nichts zu zeigen ($C_0 := 1$).

„$l \to l+1$:“ Sei $\{\chi_i \in \mathcal{D}_{(\omega)}(\Omega \setminus K'_{l-1}) \mid i \in \mathbb{N}\}$ dicht in $\mathcal{D}_{(\omega)}(\Omega \setminus K'_{l-1})$ (mit Lemma 4.4). Setze:

$$\Phi(.) := \sum_{i=1}^{l} \sum_{j=1}^{n_i} |\langle ., \psi_j^{(i)} \rangle|$$

Angenommen: $(*)$ gilt nicht für $l+1$, d.h. es gibt ein $\varepsilon > 0$ so, daß

$$\begin{aligned} &\forall \tilde{q} \text{ stetige Halbnorm auf } \mathcal{D}_{(\omega)}(\Omega) \\ &\qquad \text{mit } \tilde{q}|_{\mathcal{D}_{(\omega)}(K_{l-1})} = q_l|_{\mathcal{D}_{(\omega)}(K_{l-1})} \\ &\forall M \subseteq \mathcal{D}_{(\omega)}(\Omega \setminus K'_{l-1}) \text{ mit } \sharp M < \infty \\ &\exists v \in \mathcal{D}_{(\omega)}(K'_{l+1}) \text{ so, daß} \end{aligned}$$

$$|f(v)| + \|v\|_{L_\infty} > C_l(1+\varepsilon)\Big(\tilde{q}(\check{P}(D)\,v) + \Phi(v) + \sum_{\phi \in M} |\langle \phi, v \rangle|\Big) \tag{4-6}$$

gilt. Fixiere eine Folge ϕ_n in $\mathcal{D}_{(\omega)}(\Omega \setminus K_{l-1})$ mit $\operatorname{supp} \phi_n \nearrow\!\!\nearrow \Omega \setminus K_{l-1}$.

Zeige: Es existiert eine Folge v_n in $\mathcal{D}_{(\omega)}(K'_{l+1})$ mit

$$\check{P}(D)\,v_n \to 0 \text{ bzgl. } \|\phi_m.\|_\lambda \tag{4-7}$$

und $\|v_n\|_{L_\infty} \le C_l(1+\varepsilon)$.
Für alle $n \in \mathbb{N}$ setze $p_n := q_l + n \sum_{i,j=1}^{n} \|\phi_j.\|_i$. Dann ist p_n eine Familie stetiger Halbnormen auf $\mathcal{D}_{(\omega)}(\Omega)$, und wegen $\phi_n|_{K_{l-1}} \equiv 0$ gilt $p_n|_{\mathcal{D}_{(\omega)}(K_{l-1})} = q_l|_{\mathcal{D}_{(\omega)}(K_{l-1})}$. Setze

$$M_n := \{\chi_i \mid 1 \le i \le n\} \subseteq \mathcal{D}_{(\omega)}(\Omega \setminus K'_{l-1}).$$

Nach Annahme existieren dann zu $\tilde{p}_n := p_n + (\sharp M_n) \sum_{\phi \in M_n} |\langle \phi, v_n \rangle|$ ($\tilde{p}_n$ ist dann eine stetige Halbnorm mit $\tilde{p}_n|_{\mathcal{D}_{(\omega)}(K_{l-1})} = q_l|_{\ldots}$) $\tilde{v}_n \in \mathcal{D}_{(\omega)}(K'_{l+1})$ mit (4-6). Durch Normieren erhält man v_n mit

$$|f(v_n)| + \|v_n\|_{L_\infty} = C_l(1+\varepsilon), \text{ woraus} \tag{4-8}$$

$$1 > p_n(\check{P}(D)\,v_n) + \Phi(v_n) + (\sharp M_n) \sum_{\phi \in M_n} |\langle \phi, v_n \rangle| \text{ folgt.} \tag{4-9}$$

Aus (4-8) folgt dann sofort

$$\forall n \in \mathbb{N} \;:\; \|v_n\|_{L_\infty} \le C_l(1+\varepsilon).$$

Angenommen: (4-7) gilt nicht. Dann gibt es $j \in \mathbb{N}, \lambda, \epsilon > 0$ mit

$$\forall N > \max(\tfrac{1}{\epsilon}, j, \lambda)\; \exists n \ge N \;:\; \|\phi_j\, \check{P}(D)\,v_n\|_\lambda > \epsilon.$$

Damit gilt dann:

$$\begin{aligned} 1 \;&<\; n\epsilon < n\|\phi_j\, \check{P}(D)\,v_n\|_\lambda \le n\|\phi_j\, \check{P}(D)\,v_n\|_n \\ &\le\; n \sum_{i,m=1}^{n} \|\phi_m\, \check{P}(D)\,v_n\|_i \\ &\le\; p_n(\check{P}(D)\,v_n) + \Phi(v_n) + (\sharp M_n) \sum_{\phi \in M_n} |\langle v_n, \phi \rangle| \\ &<\; 1 \qquad . \end{aligned}$$

Daraus folgt dann (4-7).

Zeige: $v_n \to 0$ in $\mathcal{E}_{(\omega)}(\Omega \setminus K'_{l-1})$. Da $\check{P}(D)\, v_n$ nach (4-7) eine Cauchyfolge in V_{l+1} (mit V_{j+1} wie in Lemma 4.6) ist, ist $\{v_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ in V_{l+1} beschränkt. Nach Lemma 4.6 ist daher auch $\{v_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ in $\mathcal{E}_{(\omega)}(\Omega \setminus K'_{l-1})$ beschränkt. Da $\mathcal{E}_{(\omega)}(\Omega \setminus K'_{l-1})$ ein (FN)-Raum ([**BMT**] 4.9) und daher ein Montelraum ist, ist $\overline{\{v_n \mid n \in \mathbb{N}\}}^{\mathcal{E}_{(\omega)}}$ kompakt. Sei v nun ein Häufungspunkt von v_n. Dann gibt es eine Teilfolge $v_{n_j} \to v$. Da $M_0 := \bigcup_{j\in\mathbb{N}} M_{n_j}$ dicht in $\mathcal{E}_{(\omega)}(\Omega \setminus K'_{l-1})$ ist und aus (4-9) folgt

$$1 > (\sharp M_n) \sum_{\phi\in M_n} |\langle v_n, \phi\rangle|,$$

gilt $v \perp M_0$ und deswegen (mit Hahn-Banach)

$$v \equiv 0 \text{ in } \Omega \setminus K'_{l-1}.$$

Damit ist 0 der einzige Häufungspunkt und aus der Kompaktheit folgt:

$$v_n \to 0 \text{ in } \mathcal{E}_{(\omega)}(\Omega \setminus K'_{l-1}).$$

Wähle nun ein $\chi \in \mathcal{D}_{(\omega)}(K'_l)$ mit $\chi \equiv 1$ auf K'_{l-1}. Dann folgt (wegen $v_n \equiv 0$ auf $\Omega \setminus K'_{l+1}$, $(1-\chi) \equiv 0$ auf K'_{l-1} und $v_n \to 0$ auf $\Omega \setminus K'_{l-1}$)

$$(1-\chi)v_n \to 0 \text{ in } \mathcal{D}_{(\omega)}(\Omega).$$

Für alle $n \geq N_0$ gilt dann (wegen $p_n \geq q_l$):

$$(4-8) \Rightarrow |f(\chi v_n)| + \|\chi v_n\|_{L_\infty} \geq C_l(1+\frac{\varepsilon}{2}),$$

$$(4-9) \Rightarrow q_l\Big(\check{P}(D)(\chi v_n)\Big) + \Phi(\chi v_n) < 1 + \frac{\varepsilon}{2}$$

und damit:

$$C_l\Big(q_l(\check{P}(D)(\chi v_n)) + \Phi(\chi v_n)\Big) < C_l(1+\frac{\varepsilon}{2}) \leq |f(\chi v_n)| + \|\chi v_n\|_\infty$$

zur Induktionvoraussetzung, da $\chi v_n \in \mathcal{D}_{(\omega)}(K'_l)$. Daraus folgt: $(*)$ gilt!

Wähle nun $\varepsilon_n := 2^{-n}$. Dann konvergiert das Produkt $\prod_{n\in\mathbb{N}}(1+\varepsilon_n)$. Wegen $q_l|_{\ldots} = q_{l+1}|_{\ldots}$ ist $q := \lim_{n\to\infty} q_n$ eine stetige Halbnorm. Da die $\psi_j^{(l)} \in \mathcal{D}_{(\omega)}(\Omega \setminus K'_l)$ sind, folgt die Lokalendlichkeit der $(\operatorname{supp} \psi_j^{(l)})_{\substack{1\leq j\leq n_l \\ l\in\mathbb{N}}}$. Insgesamt sind damit (4-3) und der Satz gezeigt.

Lemma 4.6. Seien K_j, K'_j, ϕ_n wie im Beweis von Satz 4.5. Für jedes $j \in \mathbb{N}_0$ setze

$$V_{j+1} := \{v \in C_c(K'_{j+1}) \mid \check{P}(D)\, v \in \mathcal{E}_{(\omega)}(\Omega \setminus K_{j-1})\}$$

mit den Halbnormen $\|.\|_{L_\infty(\Omega)}$ und $(\|\phi_n\, \check{P}(D)(.)\|_\lambda)_{n\in\mathbb{N},\lambda>0}$. Dann ist V_{j+1} ein Fréchetraum und die Einschränkungsabbildung

$$\iota : V_{j+1} \to \mathcal{E}_{(\omega)}(\Omega \setminus K'_{j-1})$$

ist stetig.

Beweis. Die Metrisierbarkeit folgt sofort, da die $\|\phi_n\, \check{P}(D)(.)\|_\lambda$ in λ monoton sind und es deswegen reicht, $\lambda \in \mathbb{N}$ zu betrachten. Sei $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge in V_{j+1}. Dann gibt es ein w in $C_c(K'_{j+1})$ mit $v_n \to w$ gleichmäßig, d.h. in der $\|.\|_{L_\infty}$-Norm und $\check{P}(D)\, v_n \to v$ bzgl. $\|\phi_m\, \check{P}(D)(.)\|_\lambda$. Wegen $(2\pi)^N |\varphi_m u|(x) = |\check{\widehat{\varphi_m u}}|(x) \leq \int_{\mathbb{R}^N} |\widehat{\phi_m u}|(t)\, dt \leq \|\phi_m u\|_\lambda$ für jedes $u \in \mathcal{E}_{(\omega)}$ und $\lambda \geq 0$, folgt $\check{P}(D)\, v_n \to v$ gleichmäßig auf jedem Kompaktum (da $\operatorname{supp} \phi_m \nearrow\!\!\!\nearrow \Omega$). Da die Topologie von $\mathcal{E}_{(\omega)}(\Omega \setminus K_{j-1})$ durch $(\|\phi_m \cdot\|_\lambda)_{\lambda>0, m\in\mathbb{N}}$ erzeugt wird, gilt $v \in \mathcal{E}_{(\omega)}(\Omega \setminus K_{j-1})$. Deswegen gilt für jedes $\psi \in \mathcal{D}_{(\omega)}(\Omega(\setminus K_{j-1})$:

$$
\begin{aligned}
\langle \check{P}(D)\,w, \psi\rangle &\overset{C_c \subseteq \mathcal{D}'_{(\omega)}}{=} \langle w, P(D)\,\psi\rangle \\
&= \int_{\mathbb{R}^N} w\,P(D)\,\psi\,dx = \lim_{n\to\infty}\int_{\mathbb{R}^N} v_n\,P(D)\,\psi\,dx \\
&= \lim_{n\to\infty}\int_{\mathbb{R}^N} \check{P}(D)\,v_n\psi\,dx = \int_{\mathbb{R}^N}\lim_{n\to\infty}\check{P}(D)\,v_n\psi\,dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^N} v\psi\,dx = \langle v, \psi\rangle
\end{aligned}
$$

und somit $\check{P}(D)\,w = v \in \mathcal{E}_{(\omega)}(\Omega \setminus K_{j-1})$, $w \in V_{j+1}$.

ι ist wohldefiniert, da aus $\check{P}(D)\,v \in \mathcal{E}_{(\omega)}(\Omega \setminus K_{j-1})$, sofort $\operatorname{sing}_\omega \operatorname{supp}\check{P}(D)\,v \subseteq K_{j-1}$ folgt und wegen der P-Konvexität für $\operatorname{sing}_\omega \operatorname{supp}$, $\operatorname{sing}_\omega \operatorname{supp} v \in K'_{j-1}$ gilt, was $v \in \mathcal{E}_{(\omega)}(\Omega \setminus K'_{j-1})$ impliziert.

Sei $v_n \to v$ in V_{j+1} und $v_n \to w$ in $\mathcal{E}_{(\omega)}(\Omega \setminus K'_{j-1})$. Da die Konvergenz in beiden Räumen die punktweise Konvergenz impliziert, gilt

$$v = w.$$

Die Stetigkeit folgt dann aus dem „Satz vom abgeschlossenen Graphen“.

Um die Notwendigkeit der P-konvexität für $\operatorname{sing}_\omega \operatorname{supp}$ mit $\mathcal{E}'_{(\omega)}$ für die Surjektivität von $P(D): \mathcal{D}'_{(\omega)} \to \mathcal{D}'_{(\omega)} /_{\mathcal{E}_{(\omega)}(\Omega)}$ zu zeigen, müssen zunächst zwei Lemmata bereitgestellt werden.

Lemma 4.7. Sei $r, \lambda > 0$ beliebig gegeben. Gilt für $\omega \in \mathcal{M}'$ und $\mu \in \mathcal{E}'_{(\omega)}$

$$\mu * \mathcal{E}'_{(\omega)}(B_r) \subseteq \mathrm{B}^{\omega, loc}_{\infty, \exp(-\lambda\omega)},$$

so ist μ bereits in $\mathcal{D}_{(\omega)}$

Beweis. Da für jedes $u \in \mathcal{E}'_{(\omega)}(B_r)$ $\operatorname{supp}\mu * u \subseteq \operatorname{supp}\mu + \operatorname{supp} u$ gilt, folgt:

$$\mu * \mathcal{E}'_{(\omega)}(B_r) \subseteq \mathrm{B}^{\omega, loc}_{\infty, \exp(-\lambda\omega)} \cap \mathcal{E}'_{(\omega)} \subseteq \mathrm{B}_{\infty, \exp(-\lambda\omega)},$$

d.h. für jedes $u \in \mathcal{E}'_{(\omega)}(B_r)$ gilt:

$$|\hat{\mu}\hat{u}| \leq C_u e^{\lambda\omega}. \tag{4-10}$$

Sei $l \in \mathbb{N}$ beliebig gegeben. Definiere

$$\phi \; : \; \mathcal{S}_\omega \to \quad : \; f \mapsto \int_{\mathbb{R}^N} e^{l\omega}\hat{f}\,dx.$$

Offensichtlich ist ϕ linear. Nach (γ') existiert ein $n \in \mathbb{N}$ so, daß $e^{-n\omega} \in L_1$ ist. Damit gilt dann:

$$|\phi(f)| \leq \|e^{-n\omega}\|_{L_1}\,\pi_{0,n+l}(f),$$

d.h. $\phi \in \mathcal{S}'_\omega \subseteq \mathcal{D}'_{(\omega)}$ und $\hat{\phi} = e^{l\omega}$. Nach Satz I.5.3 existiert ein $v \in \mathcal{D}_{(\omega)}(B_r)$ mit $\hat{v} \geq 0$. Für $v\phi \in \mathcal{E}'_{(\omega)}(B_r)$ und $s \in \mathbb{R}^N$ gilt dann:

$$\begin{aligned} \widehat{v\phi}(s) &= \hat{v} * \hat{\phi} = \int_{\mathbb{R}^N} \hat{v}(t) e^{l\omega(s-t)}\, dt \\ &\overset{\hat{v}\geq 0,(\alpha')}{\geq} C \int_{\mathbb{R}^N} \hat{v}(t) e^{\frac{l}{K}\omega(s) - l\omega(t)}\, dt \geq C \|v\|_{1,\exp(-l\omega)}\, e^{\frac{l}{K}\omega(s)}. \end{aligned}$$

Damit gilt:

$$|\hat{\mu}| e^{\frac{l}{K}\omega} \leq \frac{1}{C} |\hat{\mu}| \widehat{v\phi} \overset{(4\text{-}10)}{\leq} C_l e^{\lambda\omega}.$$

Daraus folgt für jedes $l \in \mathbb{N}$:

$$\|\mu\|_{\infty,\exp(l\omega)} < \infty$$

und damit

$$\mu \in \bigcap_{l\in\mathbb{N}} \mathrm{B}_{\infty,\exp(l\omega)}\,.$$

Sei l beliebig. Für $\varphi \in \mathcal{D}_{(\omega)}$ folgt mit Satz II.2.9 $\varphi\mu \in \mathrm{B}^{\omega,loc}_{\infty,\exp(l\omega)}$, da $\mu \in \mathrm{B}_{\infty,\exp(Kl\omega)}$ ist. Daher gilt

$$\mu \in \bigcap_{l\in\mathbb{N}} \mathrm{B}^{\omega,loc}_{\infty,\exp(l\omega)} \overset{\text{Satz II.3.7}}{=} \mathcal{E}_{(\omega)}\,.$$

Wegen $\operatorname{supp}\mu$ kompakt, folgt $\mu \in \mathcal{D}_{(\omega)}$.

Lemma 4.8. Sei $\omega \in \mathcal{M}'$, $k \in \mathcal{K}_\omega$, $u \in \mathrm{B}^{\omega,c}_{p,k}$ und $v \in \mathrm{B}_{p',\frac{1}{k}}$ mit $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$ Dann gilt:

$$|u * v| \leq (2\pi)^{-N} \|u\|_{p,k}\, \|v\|_{p',\frac{1}{k}}.$$

Beweis.

$$\begin{aligned} |u * v|(x) &= (2\pi)^{-N} |\widehat{\hat{u}\hat{v}}(-x)| = (2\pi)^{-N} \left| \int_{\mathbb{R}^N} \hat{u}(t)\hat{v}(t) e^{-i\langle -x,t\rangle}\, dt \right| \\ &\leq (2\pi)^{-N} \int_{\mathbb{R}^N} |\hat{u}| k |\hat{v}| \frac{1}{k}\, dt \overset{\text{Hölder}}{\leq} (2\pi)^{-N} \|\hat{u}k\|_{L_p}\, \|\hat{v}\frac{1}{k}\|_{L_{p'}} \\ &= (2\pi)^{-N} \|u\|_{p,k}\, \|v\|_{p',\frac{1}{k}} \end{aligned}$$

Satz 4.9. *Falls $P(D)$ eine surjektive Abbildung auf $\mathcal{D}'_{(\omega)} / \mathcal{E}_{(\omega)}(\Omega)$ induziert, ist Ω P-konvex für* $\operatorname{sing}_\omega \operatorname{supp}$ *mit $u \in \mathcal{E}'_{(\omega)}(\Omega)$.*

Beweis. Angenommen: Ω ist nicht P-konvex für $\operatorname{sing}_\omega \operatorname{supp}$ mit $\mathcal{E}'_{(\omega)}(\Omega)$. Dann gibt es ein Kompaktum $K \quad \Omega$ so, daß (4-1) für jedes $\tilde{K} \quad \Omega$ verletzt ist.

Konstruiere $K_j \nearrow\!\!\nearrow \Omega$, $\mu_j \in \mathcal{E}'_{(\omega)}(\Omega)$, $x_j \in \Omega$, $u_j \in \mathcal{E}'_{(\omega)}$ $\lambda_j > 0$ und $r_j > 0$ $(j \in \mathbb{N})$ mit

(1)	$\operatorname{sing}_\omega \operatorname{supp} \check{P}(D)\, \mu_j \subseteq K$	(2)	$x_j \in \operatorname{sing}_\omega \operatorname{supp} \mu_j \setminus K_j$
(3)	$\forall k < j$: $x_j \notin \operatorname{supp} \mu_k$	(4)	$x_j + \overline{B_{r_j}} \cap K_j = \emptyset$
(5)	$\operatorname{supp} \mu_j + B_{r_j} \quad \Omega$	(6)	$\operatorname{supp} u_j \subseteq B_{\frac{r_j}{4}}$
(7)	$K + B_{r_1} \quad \Omega$	(8)	$r_j > r_{j+1}$

(9) $\operatorname{supp}\mu_j \subseteq B_{\frac{r_j}{(}x_j)2}$ (10) $u_j * \mu_j \notin B^{\omega,loc}_{\infty,exp(-\lambda_j\omega)}$
(11) $\forall k < j : (x_j + \overline{B_{r_j}}) \cap (\overline{B_{r_k}} + \operatorname{supp}\mu_k) = \emptyset$

Sei $\tilde{K}_j \nearrow\!\!\nearrow \Omega$ beliebig. Nach Annahme existiert ein $\tilde{\mu}_1 \in \mathcal{E}'_{(\omega)}(\Omega)$ mit (1) und $\operatorname{sing}_\omega \operatorname{supp}\tilde{\mu}_1 \not\subseteq \tilde{K}_1$. Deswegen kann man ein $x_1 \in \Omega$ finden so, daß (2) gilt. Setze $K_1 := \tilde{K}_1$ mit r_1 so, daß (4) gilt und $K + B_{r_1} \quad \Omega$. Wähle $\chi \in \mathcal{D}_{(\omega)}(B_{\frac{r_1}{2}}(x_1))$ mit $\chi|_{B_{\frac{r_1}{4}}(x_1)} \equiv 1$ und definiere $\mu_1 := \chi\tilde{\mu}_1$. Die so gefundenen μ_1, r_1, K_1 erfüllen dann (1), (2), (4), (5), (9) und (7).

Seien K_j, x_j, r_j und μ_j bereits gefunden. Wegen $\tilde{K}_j \nearrow\!\!\nearrow \Omega$ und $K_j \cup \operatorname{supp}\mu_j \cup \{x_j\} \quad \Omega$ gibt es ein $m \in \mathbb{N}$ mit $K_j \cup \operatorname{supp}\mu_j \subset \tilde{K}_m$ und $x_j \in \overset{\circ}{\tilde{K}}_m$ Setze $K_{j+1} := \tilde{K}_m$. Für K_{j+1} existiert dann ein $\tilde{\mu}_{j+1}$, x_{j+1} mit (1) und (2). Hierzu wähle ein $r_{j+1} < r_j$ so, daß $K_j + B_{r_{j+1}} \subseteq K_{j+1}$ und $B_{2r_{j+1}}(x_{j+1}) \cap B_{r_k}(x_k) = \emptyset$ für jedes $k \leq n$ gilt. Wähle $\chi \in \mathcal{D}_{(\omega)}(B_{\frac{r_{j+1}}{2}}(x_{j+1}))$ mit $\chi|_{B_{\frac{r_{j+1}}{4}}(x_{j+1})} \equiv 1$ und definiere $\mu_{j+1} := \chi\tilde{\mu}_{j+1}$. Die so gefundenen $\mu_{j+1}, r_{j+1}, K_{j+1}$ erfüllen dann (1), (2), (3), (4), (11), (5), (9) und (8).

Nach Satz I.6.12 existiert für alle $k \in \mathbb{N}$ ein $s_k > 0$ mit

$$|||\mu_k|||_{-s_k} < \infty, \tag{4-11}$$

wobei $|||.|||_{-s_k\omega} := \|.\|_{\infty,\exp(-s_k\omega)}$ ist. Definiere rekursiv Folgen positiver Zahlen $(l_k)_{k\in\mathbb{N}}$, $(\lambda_k)_{k\in\mathbb{N}}$ und eine Folge $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ in $\mathcal{E}'_{(\omega)}(\Omega)$. Setze dazu $l_0 := 0$ und $\lambda_k := s_k + l_{k-1} + 1$. Da $x_k \in \operatorname{sing}_\omega \operatorname{supp}\mu_k$ und $\operatorname{supp}\mu_k \in B_{\frac{r_k}{2}}$ nach (9) und (2) gelten, kann man nach Lemma 4.7 ein $u_k \in \mathcal{E}'_{(\omega)}(B_{\frac{r_k}{4}})$ finden so, daß

$$u_k * \mu_k \notin \mathrm{B}^{\omega,loc}_{\infty,\exp(-K\lambda_k\omega)}(B_{r_k}(x_k)) \tag{4-12}$$

gilt. (u_k erfüllt dann (10) und (6)). Wiederum mit Satz I.6.12 kann man ein $l_k > 0$ so wählen, daß

$$|||u_k|||_{-l_k} < \infty \tag{4-13}$$

gilt. Nach Satz II.3.6 ist dann $|||u_k * \mu_k|||_{-l_k - s_k} < \infty$ und wegen (4-12) ist $s_k + l_{k-1} + 1 = \lambda_k < l_k + s_k$, d.h. $l_k > 1 + l_{k-1}$, $l_k \to \infty$, d.h. $l_k \nearrow \infty$.

Definiere

$$\forall \psi \in \mathcal{D}_{(\omega)}(\Omega) \;:\; f(\psi) = \sum_{k=1}^{\infty} \check{u}_k(\tau_{-x_k}\psi).$$

Die Reihe konvergiert in $\mathcal{D}'_{(\omega)}(\Omega)$, da die $\operatorname{supp} u_k(\tau_{-x_k}) = \operatorname{supp} u_k + x_k$ lokalendlich sind (mit (4) und (11).

Nach der Satzvoraussetzung existiert ein $u \in \mathcal{D}'_{(\omega)}(\Omega)$ und ein $g \in \mathcal{E}_{(\omega)}(\Omega)$ mit $P(D)\,u = f + g$. Dann ist

$$\forall \psi \in \mathcal{D}_{(\omega)}(\Omega) \;:\; u(\check{P}(D)\,\psi) = f(\psi) + g(\psi). \tag{4-14}$$

Für jedes $\varphi \in \mathcal{D}_{(\omega)}(B_{r_k})$ gilt nach Satz I.5.2:

$$\mu_k * \varphi \in \mathcal{D}_{(\omega)}(\Omega),$$

da $\operatorname{supp}\mu_k * \varphi \subseteq \operatorname{supp}\mu_k + B_{r_k} \overset{(5)}{\quad} \Omega$ gilt. Damit gilt (4-14) speziell für $\psi = \mu_k * \varphi$. Durch Einsetzen folgt:

$$u(\check{P}(D)\,\mu_k * \varphi) = \sum_{j=1}^{\infty} \check{u}_j(\tau_{-x_j}\mu_k * \varphi) + g(\mu_k * \varphi). \tag{4-15}$$

Wegen (11) gilt:

$$\forall j > k \;:\; \check{u}_j(\tau_{-x_j}\mu_k * \varphi) = 0,$$

da $\operatorname{supp}\check{u}_j(\tau_{-x_j}) = \operatorname{supp}\check{u}_j + x_j \subseteq B_{r_j}(x_j)$ und $\operatorname{supp}\mu_k * \varphi \subseteq \operatorname{supp}\mu_k + \overline{B_{r_k}}$ gilt. Wegen $\check{v}(\tau_{-x}\psi) = v * \psi(x)$ gilt:

$$u_k * \mu_k * \varphi(x_k) = u(\check{P}(D)\,\mu_k * \varphi) - g(\mu_k * \varphi) - \sum_{j=1}^{k-1} u_j * \mu_k * \varphi(x_j). \tag{4-16}$$

Es werden nun die Terme auf der rechten Seite einzeln abgeschätzt. Mit (4-11) und (4-13) gilt

$$\begin{aligned} |u_j * \mu_k * \varphi|(x) &= |\mu_k * (u_j * \varphi)|(x) \\ &\overset{\text{Lemma 4.8}}{\leq} (2\pi)^{-N} |||\mu_k|||_{-s_k}\, \|u_j * \varphi\|_{s_k} \\ &\overset{\text{Satz II.2.7}}{\leq} (2\pi)^{-N} |||\mu_k|||_{-s_k}\, |||u_j|||_{-l_j}\, \|\varphi\|_{s_k+l_j} \\ &=: C_j |||\mu_k|||_{-s_k}\, \|\varphi\|_{s_k+l_j}. \end{aligned}$$

Da l_j monoton wächst und $\lambda_k = s_k + l_{k-1} + 1$ ist, gilt für $j < k$:

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}_{(\omega)}(B_{r_k}) \;:\; |u_j * \mu_k * \varphi| \leq \tilde{C}_k \|\varphi\|_{\lambda_k} \tag{4-17}$$

mit $\tilde{C}_k := |||\mu_k|||_{-s_k} \max_{j<k} C_j$.

Sei $\chi \in \mathcal{D}_{(\omega)}(\Omega)$ mit $\chi \equiv 1$ auf K und $\operatorname{supp}\chi + \overline{B_{r_1}} =: \tilde{K} \quad \Omega$ (mit (7)). Seien a, b die Konstanten aus (γ), $m := \deg P$, $v_k' := \chi\, \check{P}(D)\,\mu_k$ und $v_k'' := (1-\chi)\,\check{P}(D)\,\mu_k$. Dann gilt:

$$|\widehat{\check{P}(D)(\delta)}|(x) = |\check{P}|(x) \leq C(1+|x|)^m \leq Ce^{-\frac{am}{b}+\frac{m}{b}\omega} =: \tilde{C}e^{\frac{m}{b}\omega} \leq \tilde{C}e^{K\frac{m}{b}\omega},$$

d.h. $\check{P}(D)\,\delta \in \mathrm{B}_{\infty,\exp(-\frac{m}{b}\omega)}$. Wegen Satz II.2.9 und Satz II.2.11 gilt: $(h := -s_k - \frac{m}{b})$

$$\begin{aligned} |||v_k'|||_h &= |||\chi(\check{P}(D)\,\delta * \mu_k)|||_h \\ &\leq \|\chi\|_{1,M_{\exp(h\omega)},K}\, |||\check{P}(D)\,\delta * \mu_k|||_{Kh} \\ &\leq \|\chi\|_{1,M_{\exp(h\omega)},K}\, |||\check{P}(D)\,\delta|||_{-K\frac{m}{b}}\, |||\mu_k|||_{-Ks_k}. \end{aligned}$$

Da $K > 1$ ist gilt: $|||.|||_{-Ks_k} \leq |||.|||_{-s_k}$ und deswegen:

$$|||v_k'|||_h < \infty.$$

Da $\operatorname{supp}(v_k'' * \varphi) \subseteq \operatorname{supp}\mu_k + B_{r_k} \quad \Omega$ und $\operatorname{sing}_\omega \operatorname{supp} v_k'' \subseteq \mathbb{R}^N \backslash (K \cap \operatorname{sing}_\omega \operatorname{supp}\check{P}(D)\,\mu_k) \overset{(1)}{=} \emptyset$ ist, gilt $v_k'' \in \mathcal{D}_{(\omega)}(\Omega)$. Nach Satz II.2.7 gilt daher:

$$\forall s \;:\; v_k'' \in \mathrm{B}^{\omega,c}_{\infty,\exp((\lambda-s)\omega)}\,.$$

Da u stetig ist, existieren C, $\lambda > 0$ mit

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}_{(\omega)}(B_{r_k}) \;:\; |u(v_k'' * \varphi)| \leq C\|v_k'' * \varphi\|_\lambda$$

und damit ($\varphi \in \mathcal{D}_{(\omega)}(B_{r_k}) \subseteq \mathrm{B}^{\omega,c}_{1,\exp(s\omega)}$)

$$|u(v''_k * \varphi)| \leq C\|v''_k * \varphi\|_\lambda \leq C|||v''_k|||_{\lambda - s}\, \|\varphi\|_s$$

und

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}_{(\omega)}(B_{r_k}), \forall s > 0\ :\ |u(v''_k * \varphi)| \leq C_s\|\varphi\|_s. \tag{4-18}$$

Schließlich folgt wegen $\operatorname{supp} v''_k * \varphi \subseteq \tilde{K}$

$$\forall \sigma > 0\ :\ \|v'_k * \varphi\|_\sigma \leq |||v'_k|||_{-s_k - \frac{m}{b}}\, \|\varphi\|_{\sigma + s_k + \frac{m}{b}}.$$

Für $C, \sigma > 0$ mit $\forall \varphi \in \mathcal{D}_{(\omega)}(\tilde{K})\ :\ |u(\varphi)| \leq C\|\varphi\|_\sigma$ gilt dann:

$$|u(v'_k * \varphi)| \leq C\|\varphi\|_{\sigma + s_k + \frac{m}{b}}.$$

Wähle k_0 nun so groß, daß $\sigma + s_{k_0} + \frac{m}{b} \leq l_{k_0 - 1} + 1 + s_{k_0} = \lambda_{k_0}$ ist. Damit folgt dann:

$$\forall k > k_0 \forall \varphi \in \mathcal{D}_{(\omega)}(B_{r_k})\ :\ |u(v'_k * \varphi)| \leq C\|\varphi\|_{\lambda_k}. \tag{4-19}$$

Wähle $\psi \in \mathcal{D}_{(\omega)}(\Omega)$ mit $\psi|_{\operatorname{supp} \mu_k + \overline{B_{r_k}}} \equiv 1$. Dann ist $\psi g \in \mathcal{D}_{(\omega)}(\Omega)$ und

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}_{(\omega)}(B_{r_k})\ :\ |g(\mu_k * \varphi)| = |\psi g(\mu_k * \varphi)| \leq |||\psi g|||_{-\lambda_k}\|\varphi\|_{\lambda_k}. \tag{4-20}$$

Mit (4-15) - (4-20) folgt dann:

$$\forall k > k_0 \forall \varphi \in \mathcal{D}_{(\omega)}(B_{r_k})\ :\ |u_k * \mu_k * \varphi|(x_k) \leq C\|\varphi\|_{\lambda_k}. \tag{4-21}$$

Im weiteren sei $k > k_0$ beliebig fixiert. Mit $\psi \in \mathcal{D}_{(\omega)}(B_{r_k}(x_k))$ und $\varphi \in \mathcal{S}_\omega$ beliebig gilt (o.B.d.A $x_k = 0$):

$$\begin{aligned} |\check{\psi}(u_k * \mu_k)(\check{\varphi})| &= |u_k * \mu_k * (\psi\varphi)|(0) \\ &\leq C\|\psi\varphi\|_{\lambda_k} \\ &\overset{\text{Bem. I.3.7}}{\leq} C\|\psi\|_{K\lambda_k}\, \|\varphi\|_{K\lambda_k}. \end{aligned}$$

Da $\mathcal{S}_\omega$ dicht in $\mathrm{B}_{1,\exp(K\lambda_k\omega)}$ ist, kann man $\check{\psi}(u_k * \mu_k)$ eindeutig zu einer stetigen Linearform auf $\mathrm{B}_{1,\exp(K\lambda_k\omega)}$ fortsetzen. Nach Satz II.2.13 gilt daher

$$\forall \psi \in \mathcal{D}_{(\omega)}(B_{r_k})\ :\ \check{\psi}(u_k * \mu_k) \in \mathrm{B}_{\infty,\exp(-K\lambda_k\omega)}$$

und daher nach Definition:

$$u_k * \mu_k \in \mathrm{B}^{\omega,loc}_{\infty,\exp(-K\lambda_k\omega)}. \quad \text{zu (4-12)}.$$

Daraus folgt, daß die Annahme falsch war, womit der Satz bewiesen ist.

Korollar 4.10. *Sei Ω offen. Dann sind äquivalent:*

(1) $P(D)(\mathcal{D}'_{(\omega)}(\Omega)) \tilde{=} \mathcal{D}'_{(\omega)} / \mathcal{E}_{(\omega)}(\Omega)$
(2) Ω *ist P-konvex für* $\operatorname{sing}_\omega \operatorname{supp}$
(3) Ω *ist P-konvex für* $\operatorname{sing}_\omega \operatorname{supp}$ *mit* $\mathcal{E}'_{(\omega)}$

Beweis. mit Satz 4.9 und Satz 4.5

KAPITEL 4

Innere Regularität, ω-Hypoelliptizität

In diesem Kapitel werden hypoelliptische und ω-hypoelliptische Differentialoperatoren charakterisiert. Dies sind solche Differentialoperatoren, für die die Lösung „sehr glatt“ ist, falls die rechte Seite dies ist.

Wie im klassischen Fall der Hypoeliptizität wird dies zum einen über die Nullstellenverteilung des Polynoms gesteuert, und zum anderen kann ω-Hypoelliptizität an der Glattheit der Nullösungen festgestellt werden.

Im zweiten Abschnitt wird dann der Zusammenhang zu der „klassischen“ Hypoelliptizität und der Elliptizität hergestellt.

1. ω-Hypoelliptizität

In diesem Kapitel wird nur ein Satz bewiesen, der die ω-hypoelliptischen Differentialoperatoren charakterisiert. Zusätzlich zu den oben vorgestellten Möglichkeiten der Charakteriserung der ω-Hypoelliptizität kommen noch zwei weitere hinzu: die Existenz einer Fundamentallösung, die außerhalb des Ursprungs sehr glatt ist, und eine Aussage darüber, wie „gut“ eine Lösung für eine „glatte“ rechte Seite mindenstens ist.

Als wichtigstes Hilfsmittel wird für die Implikation „(1) $\Rightarrow$ (2)“ eine Fundamentallösung mit einer Hörmanderschen Treppe definiert.

Satz 1.1. *Seien $\omega_1, \omega_2 \in \mathcal{M}'$ und $\omega := \omega_1 + \omega_2$. Für $P(D)$ sind dann äquivalent:*

(1) *Für jedes $A > 0$ existiert ein B so, daß für $z \in {}^N$ gilt:*

$$P(z) = 0 \Rightarrow |\operatorname{Im} z| \geq A\omega(\operatorname{Re} z) - B$$

(2) *P hat eine Fundamentallösung $E \in \mathcal{D}'$ mit $E \in \mathcal{E}_{(\omega)}(\mathbb{R}^N \setminus \{0\})$.*
(3) *Für jede offene Menge Ω gilt:*

$$u \in \mathcal{D}'_{(\omega_2)}(\Omega) \text{ mit } P(D)\, u \in \mathcal{E}_{(\omega_1)}(\Omega) \Rightarrow u \in \mathcal{E}_{(\omega_1)}(\Omega).$$

(4) *Es gibt eine offene Menge Ω mit*

$$u \in \mathcal{D}'_{(\omega_2)}(\Omega) \text{ mit } P(D)\, u = 0 \Rightarrow u \in \mathcal{E}_{(\omega_1)}(\Omega).$$

Definition 1.2. *Jedes $P(D)$, das eine der vier Bedingungen von Satz 1.1 erfüllt, heißt ω-hypoelliptisch.*

Der Beweis folgt später, erst müssen einige Lemmata bereitgestellt werden:

Lemma 1.3. Seien $K \quad \Omega$ sowie Ω_n $(1 \leq n \leq m)$ offen mit $K \subseteq \bigcup_{n=1}^m \Omega_n$ gegeben. Dann gibt es $0 \leq \phi_n \in \mathcal{D}_{(\omega)}(\Omega_n)$ mit $\sum_{n=1}^m \phi_n = 1$ auf K.

Beweis. Wähle ein $\delta > 0$ so, daß es zu jedem $x \in K$ ein $1 \leq n \leq m$ gibt so, daß $B_{2\delta}(x) \subseteq \Omega_n$ gilt. Definiere rekursiv

$$U_n := \{x \in K + B_\delta \mid x + B_{2\delta} \subseteq \Omega_n\} \setminus \bigcup_{j=1}^{n-1} U_j.$$

Offensichtlich gilt dann $\sum_{n=1}^m \chi_{U_n} = 1$ auf $K + \delta$. $\phi_n := \chi_{U_n} * \phi_\delta$ hat dann alle gewünschten Eigenschaften.

Lemma 1.4. Sei $\Omega, \omega_1, \omega_2$ und P wie in 1.1.(4). Sei $K_n \nearrow\!\!\nearrow \Omega$ und $\phi_n \in \mathcal{D}_{(\omega)}(K_{n+1})$ mit $\phi_n \equiv 1$ auf K_n. Dann ist für jedes $\lambda > 0$

$$F := \{u \in \mathrm{B}^{\omega_2, loc}_{1,\exp(-\lambda\omega_2)}(\Omega) \mid P(D)\, u = 0\}$$

mit der von $(\|\phi_n . \|_{1,\exp(-\lambda\omega_2)})_{n \in \mathbb{N}}$ erzeugten Topologie ein Fréchetraum.

Beweis. Analog dem Beweis von II.3.2 zeigt man, daß die Inklusion

$$F \to \mathcal{D}'_{(\omega)}(\Omega)$$

stetig ist. Für eine Cauchy-Folge u_n zeigt man wie dort, daß es ein $u \in \mathcal{D}'_{(\omega)}(\Omega)$ gibt so, daß $u_n \to u$ bezüglich $\|\phi_m . \|_{\dots}$ und $u_n \to u$ in $\mathcal{D}'_{(\omega)}(\Omega)$. gilt. Da $P(D) : \mathcal{D}'_{(\omega)} \to \mathcal{D}'_{(\omega)} : u \mapsto P(D)\, u$ stetig ist, gilt $P(D)(u) = 0$. Nach Voraussetzung gilt daher $u \in \mathcal{E}_{(\omega_1)} \subseteq C^\infty$. Da $\mathcal{D}_{(\omega_1)} \subseteq C^\infty$ gilt, hat man für jedes $\phi \in \mathcal{D}_{(\omega_2)} : \phi u \in C^\infty_c$. Wegen $\log(1 + |t|) \geq 0 \geq -\lambda\omega_2(t)$ folgt daher $\phi u \in \mathrm{B}_{1,\exp(-\lambda\omega_2)}$, d.h. $u \in F$.

Lemma 1.5. Sei $P \in [z_1, \dots, z_N]$ mit $\deg P = m \geq 1$. Dann gibt es eine reelle $N \times N$ Matrix C mit $\det C = 1$ und

$$P \circ C(z) = a z_1^m + \sum_{k=0}^{m-1} Q_k(z') z_1^k$$

mit $Q_k \in [z_2, \dots, z_N]$ und $a \neq 0$.

Beweis. Sei $P(z) = \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha z^\alpha = \sum_{|\alpha| = m} a_\alpha z^\alpha + \sum_{|\alpha| < m} a_\alpha z^\alpha =: P_m(z) + R(z)$. Wegen $\deg P = m$ gilt $P_m \neq 0$. Also existiert ein $x \in \mathbb{R}^N$ mit $P_m(x) \neq 0$. Man kann annehmen, daß $x_1 \neq 0$ ist, da man wegen $x \neq 0$ (P_m ist m-homogen!) sicher für eine geeignete Permutationsmatrix C_1 $(C_1 x)_1 \neq 0$ hat und $P \circ C_1 = P_m \circ C_1 + R \circ C_1$ die entsprechende Zerlegung von $P \circ C_1$ liefert. Sei also $x_1 \neq 0$ und

$$C_2 = \begin{pmatrix} x_1 & 0 & & \dots & 0 \\ & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & 0 & & & \\ & \vdots & & & 0 \\ x_N & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Dann gilt $\det C_2 = x_1 \neq 0$ und

$$\begin{aligned} P_m(C_2 z) &= P_m(x_1 z_1, x_2 z_1 + z_2, \dots, x_N z_1 + z_N) \\ &= \sum_{|\alpha|=m} a_\alpha (x_1 z_1)^{\alpha_1} \prod_{j=2}^{N} (x_j z_1 + z_j)^{\alpha_j} \\ &= \sum_{|\alpha|=m} a_\alpha (x_1 z_1)^{\alpha_1} \prod_{j=2}^{N} \left(\sum_{\beta_j=0}^{\alpha_j} \binom{\alpha_j}{\beta_j} (x_j z_1)^{\beta_j} z_j^{\alpha_j - \beta_j} \right) \\ &= \sum_{|\alpha|=m} a_\alpha (x_1 z_1)^{\alpha_1} \prod_{j=2}^{N} (x_j z_1)^{\alpha_j} + \sum_{k=0}^{m-1} \tilde{Q}_k(Z_2, \dots, z_N) z_1^k \\ &= P_m(x) z_1^m + \sum_{k=0}^{m-1} \tilde{Q}_k(z_2, \dots, z_N) z_1^k \end{aligned}$$

Da $\deg R \leq m-1$ ist, folgt:

$$P \circ C_2(z) = a z_1^m + \sum_{k=0}^{m} Q_k(z_2, \dots, z_N) z_1^m.$$

Mit $C := \operatorname{diag}(\frac{1}{x_1}, 1, \dots, 1) C_2 C_1$ folgt dann die Behauptung.

Lemma 1.6. Sei $C \in \mathbb{R}^{N \times N}$ invertierbar und E Fundamentallösung von $P \circ C(D) =: \tilde{P}(D)$. Dann ist

$$\tilde{E} : \varphi \mapsto \langle E, \varphi \circ (C^t)^{-1} \rangle$$

eine Fundamentallösung zu $P(D)$.

Beweis. Sei $C = (c_{j,k})_{j,k=1}^N$ und $\varphi = \psi \circ C^t$. Aus der Kettenregel folgt:

$$D_k \varphi(x) = \sum_{j=1}^{N} D_j \psi(C^t x) c_{k,j} = ((\sum_{j=1}^{N} c_{k,j} D_j) \psi)(C^t x).$$

Daher gilt dann:

$$\begin{aligned} \check{P}(D)\, \varphi &= \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha (-D)^\alpha \varphi = (\sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha (-CD)^\alpha \psi) C^t \\ &= (\check{\tilde{P}}(D)\, \psi) \circ C^t \end{aligned}$$

Damit folgt:

$$\begin{aligned} \langle P(D)\, \tilde{E}, \varphi \rangle &= \langle \tilde{E}, \check{P}(D)\, \varphi \rangle = \langle E, \check{\tilde{P}}(D)\, \psi \rangle \\ &= \langle \tilde{P}(D)\, E, \psi \rangle = \psi(0) = \phi(0). \end{aligned}$$

Definition 1.7. *Sei* $(\Delta_j)_{j \in \mathbb{N}}$ *eine disjunkte Zerlegung des* $\mathbb{R}^{N-1}$ *in Borelmengen und* $(\lambda_j)_{j \in \mathbb{N}}$ *eine Folge reeller Zahlen.*

$$T := \bigcup_{j \in \mathbb{N}} \{(x_1 + i\lambda_j, x_2, \dots, x_N) \mid x_1 \in \mathbb{R}, (x_2, \dots, x_N) \in \Delta_j\}$$

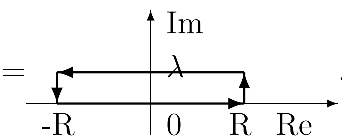
heißt (Hörmandersche) Treppe

LEMMA 1.8. Für jedes $\varphi \in \mathcal{D}$ und jede Treppe T gilt:

$$(2\pi)^N \varphi(0) = \int_{\mathbb{R}^N} \hat{\varphi}\, dx = \int_T \hat{\varphi}\, dz := \sum_{j\in\mathbb{N}} \int_{\Delta_j} \int_{\mathbb{R}} \hat{\varphi}(x_1 + i\lambda_j, x')\, dx_1\, dx'$$

BEWEIS. Setze $\psi := \hat{\varphi}$ und zeige zunächst

$$\int_{\mathbb{R}} \psi(x_1, x')\, dx_1 = \int_{\mathbb{R}} \psi(x_1 + i\lambda, x')\, dx_1 \tag{1-1}$$

für jedes reelle λ. Sei $\Gamma_R =$ 

. Da ψ holomorph ist, folgt aus der Cauchyschen Integralformel

$$\int_{\Gamma_R} \psi(z_1, x')\, dz_1 = 0 \tag{1-2}$$

Es gilt mit jedem $\Lambda > 0$:

$$\begin{aligned} \left|\int_0^\lambda \psi(\pm R + it, x')\, dt\right| &\le \int_0^\lambda |\psi(\pm R + it, x')|\, dt \\ &\overset{\text{Paley-Wiener}}{\le} \int_0^\lambda C_\Lambda e^{H(t,0) - \Lambda\omega(R)}\, dt \\ &\le C e^{-\Lambda\omega(R)} \to 0 \end{aligned}$$

Aus (1-2) folgt damit (1-1). Nun gilt:

$$\begin{aligned} \int_T \psi(z)\, dz &= \sum_{j\in\mathbb{N}} \int_{\Delta_j} \int_{\mathbb{R}} \psi(x_1 + i\lambda_j, x')\, dx_1\, dx' = \sum_{j\in\mathbb{N}} \int_{\Delta_j} \int_{\mathbb{R}} \psi(x_1, x')\, dx_1\, dx' \\ &= \int_{\mathbb{R}^N} \psi(x)\, dx = \int_{\mathbb{R}^N} \psi(x) e^{-i\langle x, 0\rangle}\, dx = \hat{\psi}(0) = \hat{\hat{\varphi}}(0) = (2\pi)^N \check{\varphi}(0) = (2\pi)^N \varphi(0) \end{aligned}$$

LEMMA 1.9. Zu jedem Polynom $P(z) = a z_1^m + \sum_{k=0}^{m-1} Q_k(z') z^k$ existiert eine Treppe T_P mit

$$\forall z \in T_P \ :\ |P(z)| \ge |a| \tag{1-3}$$

$$\forall j \in \mathbb{N} \ :\ |\lambda_j| \le m + 1. \tag{1-4}$$

Gilt zusätzlich noch 1.1.(1), so kann

$$\exists L, M \in \mathbb{N} \forall j \ge L \ :\ \lambda_j = 0 \text{ und } |x'_j|_\infty > M \tag{1-5}$$

erreicht werden.

BEWEIS. Ist $x' = (x_2, \dots, x_N) \in \mathbb{R}^{N-1}$ fest gewählt, so hat das Polynom

$$P_1 : z \mapsto a z^m + \sum_{k=0}^{m-1} Q_k(x') z^k$$

m Nullstellen (mit Vielfachheit gezählt) $z^{(l)} = x^{(l)} + i y^{(l)}$ $(1 \le l \le m)$, und es gilt:

$$P_1(z) = a \prod_{l=1}^m (z - z^{(l)}).$$

Dann existiert ein $\lambda = \lambda_{x'} \in [-m-1, m+1]$ mit $|\lambda - y^{(l)}| > 1$ für $1 \leq l \leq m$ Denn angenommen, daß es für jedes $-m-1 \leq \lambda \leq m+1$ ein $1 \leq l \leq m$ gibt, mit $|\lambda - y^{(l)}| \leq 1$, so gilt offensichtlich:

$$\forall y^{(l)} \exists y^{(n)} \neq y^{(l)} \text{ mit } |y^{(l)} - y^{(n)}| \leq 2.$$

Damit folgt dann

$$\max_{1 \leq i,j \leq m} |y^{(i)} - y^{(j)}| \leq 2m - 2.$$

Für $\lambda_1 = -m-1$ und $\lambda_2 = -\lambda_1$ gibt es dann l_i so, daß $|\lambda_i - y^{(l_i)}| \leq 1$ $(i = 1, 2)$ und damit

$$2m + 2 = |\lambda_1 - \lambda_2| \leq |\lambda_1 - y^{(l_1)}| + |\lambda_2 - y^{(l_2)}| + |y^{(l_1)} - y^{(l_2)}| \leq m.g$$

$\Rightarrow$ Es existiert ein λ mit der gewünschten Eigenschaft.

Da nach dem Satz von Rouché die Nullstellen stetig von x' abhängen, gibt es eine offene Umgebung $U_{x'} \subseteq \mathbb{R}^{N-1}$ von x' mit

$$\forall \xi' \in U_{x'} \; : \; |\lambda - \operatorname{Im} z_{l,\xi'}| > 1,$$

wobei $z_{l,\xi'}$ die Nullstellen von $P(z, \xi')$ sind. Für $(x, \xi') \in \mathbb{R} \times U_{x'}$ gilt:

$$\begin{aligned} |P(x + i\lambda, \xi')| &= |a| \prod_{l=1}^{m} |x + i\lambda - z_{l,\xi'}| \geq |a| \prod_{k=1}^{m} |\operatorname{Im}(x + i\lambda - z_{l,\xi'})| \\ &= |a| \prod_{k=1}^{m} |\lambda - \operatorname{Im} z_{l,\xi'}| \geq |a|. \end{aligned}$$

Die Mengen $(U_{x'})_{x' \in \mathbb{R}^{N-1}}$ bilden eine offene Überdeckung von $\mathbb{R}^{N-1}$. Daher gibt es abzählbar viele $(x'_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit

$$\mathbb{R}^{N-1} \subseteq \bigcup_{n \in \mathbb{N}} U_{x'_n}.$$

Gilt 1.1.(1), so gibt es zu jedem beliebigem A ein B und ein $M > 0$ so, daß

$$\forall |x'| > M \; : \; \operatorname{Im} z_{l,x'} \geq A\omega(0, x') - B \geq M > 1$$

gilt. Deswegen kann dann $\lambda_{x'} = 0$ gewählt werden. Da sich jede beschränkte Menge in $\mathbb{R}^{N-1}$ mit nur endlich vielen $U_{x'}$ überdecken läßt, kann $|x'| \to \infty$ erricht werden.

Setze nun

$$\Delta_j := U_{x'_j} \setminus \bigcup_{k=1}^{j-1} U_{x'_k} \qquad \lambda_j := \lambda_{x'_j}.$$

Damit hat man dann die gesuchte Treppe.

Lemma 1.10. Sei P wie in Lemma 1.5 konstruiert, $T_{\check{P}}$ wie in Lemma 1.9. Dann ist

$$E : \varphi \mapsto (2\pi)^{-N} \int_{T_{\check{P}}} \frac{\hat{\varphi}}{\check{P}} \, dz$$

eine Fundamentallösung für $P(D)$.

Beweis. Sei $\varphi \in C_c^\infty(K) = \mathcal{D}_{(\log(1+|t|))}(K)$ beliebig. Setze $\omega := \log(1+|.|) \in \mathcal{M}$. Dann folgt aus dem Satz von „Paley-Wiener“, mit λ aus (γ') und (1-3), (1-4):

$$\begin{aligned}
|E(\varphi)| &\leq C \int_{T_{\check{P}}} |\hat{\varphi}|\, dz \\
&\leq C \int_{T_{\check{P}}} e^{-\lambda\omega(\operatorname{Re} z)-H_K(\operatorname{Im} z)} |\hat{\varphi}|(z) e^{\lambda\omega(\operatorname{Re} z)+H_K(\operatorname{Im} z)}\, dz \\
&\leq C \sup_{z\in {}^N} |\hat{\varphi}(z) e^{\lambda\omega(\operatorname{Re} z)+H_K(\operatorname{Im} z)}| \int_{T_{\check{P}}} e^{-\lambda\omega(\operatorname{Re} z)-H_K(\operatorname{Im} z)}\, dz \\
&\overset{(1\text{-}4)}{\leq} C \sup_{z\in {}^N} |\hat{\varphi}(z) e^{\lambda\omega(z)+H_K(\operatorname{Im} z)}|\, e^{(m+1)\max_{x\in K}|x|} \int_{\mathbb{R}^N} e^{-\lambda\omega}\, dx \\
&= C \sup_{z\in {}^N} |\hat{\varphi}(z) e^{\lambda\omega(z)+H_K(\operatorname{Im} z)}|
\end{aligned}$$

Nach Korollar I.3.5 und Bemerkung I.4.2 folgt damit die Stetigkeit von E.

Mit 1.8 folgt:

$$\begin{aligned}
\langle P(D)\, e, \varphi\rangle &= \langle E, \check{P}(D)\,\varphi\rangle = (2\pi)^{-N} \int_{T_{\check{P}}} \frac{\widehat{\check{P}(D)\,\varphi}}{\check{P}(D)}(z)\, dz \\
&= (2\pi)^{-n} \int_{T_{\check{P}}} \hat{\varphi}\, dz = \varphi(0) = \langle \delta, \varphi\rangle
\end{aligned}$$

Lemma 1.11. Sei C eine reelle invertierbare $N \times N$ Matrix. Dann gilt 1.1.(1) für P genau dann, wenn es für $P \circ C$ gilt. Ferner bleibt 1.1.(1) auch für jede äquivalente Gewichtsfunktion $\tilde{\omega}$ gültig.

Beweis. Es existieren $E, \tilde{E} > 0$ sowie $F, \tilde{F} \in \mathbb{R}$ mit

$$\omega(x) \leq \tilde{E}\tilde{\omega}(x) + \tilde{F} \quad \text{und} \quad \tilde{\omega} \leq E\omega + F.$$

Sei $A > 0$ beliebig gegeben, B $(\tilde{B})$ nach 1.1.(1) für ω $(\tilde{\omega})$ gefunden. Sei $P(x+iy) = 0$. Dann gilt:

$$|y| \geq A\omega(x) - B \geq \frac{A}{E}\tilde{\omega} - \frac{F}{E} - B$$

und

$$|y| \geq A\tilde{\omega}(x) - \tilde{B} \geq \frac{A}{\tilde{E}}\omega - \frac{\tilde{F}}{\tilde{E}} - \tilde{B}.$$

Da C invertierbar ist, gibt es ein $D \in \mathbb{N}$ so, daß für jedes $z \in {}^N$ $\frac{1}{D}|Cz| \leq |z| \leq D|Cz|$ gilt. Daher folgt mit Induktion aus (α):

$$\omega(Cz) = \omega(|Cz|) \leq \omega(D|z|) \leq \tilde{D} + K^{D-1}\omega(z).$$

Analog gilt:

$$\omega(z) = \omega(|z|) \leq \omega(D|Cz|) \leq \tilde{D}K^{D-1}\omega(Cz).$$

Also sind ω und $\omega \circ C$ äquivalent. Da C reell ist, gilt für jedes $z \in {}^N$:

$$\operatorname{Im} Cz = C \operatorname{Im} z \text{ und } \operatorname{Re} Cz = C \operatorname{Re} z.$$

Sei $z \in {}^N$ mit $P \circ C(z) = 0$. Dann ist Cz eine Nullstelle von P. Nach dem oben gezeigtem und der Voraussetzung gilt dann ($\tilde{\omega} := \omega \circ C$):

$$\begin{aligned} |\operatorname{Im} z| &\geq \frac{1}{D} |\operatorname{Im} Cz| \geq \frac{A}{D} \omega(C \operatorname{Re} z) - \frac{B}{D} \\ &\geq \frac{A}{D\tilde{E}} \omega(\operatorname{Re} z) - \frac{\tilde{F}}{D\tilde{E}} - \frac{\tilde{B}}{D}. \end{aligned}$$

Da A beliebig ist, und alle anderen Konstanten (bis auf $\tilde{B}$) hiervon unabhängig sind, gilt 1.1.(1) auch für $P \circ C$. Analog kann die andere Richtung gezeigt werden.

Zum Beweis von Satz 1.1 . „1.1.(1)$\Rightarrow$1.1.(2):“ Nach den Lemmata 1.5, 1.6, 1.11 und I.2.4 kann man o.B.d.A $\omega \in C^\infty$ mit $\frac{\partial}{\partial x_1}\omega \leq V$ und P von der Form

$$P(z_1, z') = a z_1^m + \sum_{k=0}^{m-1} Q_k(z') z_1^k$$

annehmen. Sei $T := T_P$ die in Lemma 1.9 konstruierte Treppe. Dann ist

$$E(\psi) = (2\pi)^{-N} \int_T \frac{\check{\hat{\psi}}}{P}\, dz \tag{1-6}$$

nach Lemma 1.10 eine Fundamentallösung. Es bleibt zu zeigen, daß $E \in \mathcal{E}_{(\omega)}(\mathbb{R}^N \setminus \{0\})$ gilt. Sei $\varphi \in \mathcal{D}_{(\omega)}(\mathbb{R}^N \setminus \{0\})$ bliebig fixiert. Zeige: Für jedes $\lambda > 0$ ist

$$\sup_{t \in \mathbb{R}^N} |\widehat{\varphi E}|(t) e^{\lambda\omega(t)} < \infty. \tag{1-7}$$

Nach Satz I.3.5 ist dies äquivalent zu $\varphi E \in \mathcal{D}_{(\omega)}$ und deswegen nach Satz I.3.9 auch zu $E \in \mathcal{E}_{(\omega)}(\mathbb{R}^N \setminus \{0\})$. Fixiere daher ein beliebiges $\lambda > 0$.

Da $E\varphi \in \mathcal{E}'_{(\omega)}$ ist, gilt:

$$\widehat{\varphi E}(t) = (\varphi E)_x(e^{-i\langle x,t\rangle}) = E_x(\varphi(x) e^{-i\langle x,t\rangle}).$$

Setze $Q := \{x \in \mathbb{R}^N \mid \|x\|_\infty := \max_{1 \leq j \leq N} |x_j| \leq M\}$, $M > M_0$, M_0 wie in (1-5) und definiere $\tilde{Q} := Q \times i\mathbb{R}^N$. Dann gilt:

$$T \setminus \tilde{Q} = \mathbb{R}^N \setminus Q.$$

Mit $\psi(x) := \varphi(x) e^{-i\langle x,t\rangle}$ folgt aus der Definition von E (1-6):

$$(2\pi)^N \widehat{\varphi E} = f + g$$

wobei

$$g(t) := \int_{T \cap \tilde{Q}} \frac{\hat{\varphi}(-z+t)}{P(z)}\, dz$$

und

$$f(t) := \int_{T \setminus \tilde{Q}} \frac{\hat{\varphi}(-z+t)}{P(z)}\, dz$$

ist. (1-7) wird durch

$$\forall M > M_0 \ : \ \|g e^{\lambda\omega}\|_{L_\infty} < \infty \tag{1-8}$$

$$\exists M > M_0 \ : \ \|f e^{\lambda\omega}\|_{L_\infty} < \infty \tag{1-9}$$

gezeigt. Da $T \cap \tilde{Q}$ beschränkt ist, gilt:

$$
\begin{aligned}
|ge^{\lambda\omega}|(t) &\leq \int_{T\cap\tilde{Q}} |\frac{\hat{\varphi}(t-z)}{P(z)}| e^{\lambda\omega}\, dz \\
&\overset{(1\text{-}3)}{\leq} \frac{1}{|a|}\int_{T\cap\tilde{Q}} |\hat{\varphi}(t-z)| e^{\lambda\omega(t)}\, dz \\
&\overset{\text{Paley-Wiener}}{\leq} \frac{1}{|a|}\int_{T\cap\tilde{Q}} C_\Delta e^{H(-Imz)-\Delta\omega(t-\operatorname{Re} z)+\lambda\omega(t)}\, dz \\
&\leq \frac{1}{|a|} C_\Delta e^{(\lambda-\Delta/K)\omega(t)} \int_{T\cap\tilde{Q}} e^{H(-\operatorname{Im} z)+\Delta\omega(\operatorname{Re} z)}\, dz \\
&\leq C_\Delta e^{(\lambda-\Delta/K)\omega(t)} < \infty.
\end{aligned}
$$

Falls $\Delta > K\lambda$. Damit ist (1-8) bewiesen, bleibt nur noch (1-9) zu zeigen. Wähle $\delta > 0$ so, daß $\operatorname{supp}\varphi \cap B_{2\delta} = \emptyset$ gilt. Bestimme A mit (γ') so, daß

$$\int_{\mathbb{R}^N} e^{(K\lambda-\delta A)\omega}\, dx < \infty \tag{1-10}$$

gilt und wähle B mit 1.1.(1). Hierzu bestimme $M > M_0$ so, daß für $t \notin Q$: $A\omega(t) - B - 2 > 0$ gilt. Zeige: Mit dieser Wahl von M gilt (1-9).

Wähle mit Lemma 1.3 Funktionen $\chi_i \in \mathcal{D}_{(\omega)}$ $(1 \leq i \leq 2N)$ mit

$$\sum_{j=1}^{2N} \chi_j \equiv 1 \text{ auf } \operatorname{supp}\varphi$$

$$\operatorname{supp}\chi_{2j} \subseteq \{x \in \mathbb{R}^N \mid x_j > \delta\}$$

$$\operatorname{supp}\chi_{2j-1} \subseteq \{x \in \mathbb{R}^N \mid x_j < -\delta\}.$$

Setze: $\varphi_i := \chi_i\varphi$ und $f_i(t) := \int_{\mathbb{R}^N\setminus Q} \frac{\hat{\varphi}_i(-z+t)}{P(z)}\, dz$ und zeige:

$$\sup_{t\in\mathbb{R}^N} |f_i|(t)e^{\lambda\omega(t)} < \infty. \tag{1-11}$$

Betrachte zunächst $i = 2$. Definiere $Q' := \{x' \in \mathbb{R}^{N-1} \mid \|x'\|_\infty \leq M\}$, $F(z) := \frac{\hat{\varphi}_2(-z+t)}{P(z)}$ und zerlege f_2 in $f_{Q'}$ und $f_{\mathbb{R}^{N-1}\setminus Q'}$ mit

$$f_{Q'} := \int_{Q'}\int_{|x_1|\geq M} F(x_1, x')\, dx_1\, dx'$$

und

$$f_{\mathbb{R}^N\setminus Q'} := \int_{\mathbb{R}^{N-1}\setminus Q'}\int_{\mathbb{R}} F(x_1, x')\, dx_1\, dx'. \tag{1-12}$$

Die Zerlegung gilt, da:

$$
\begin{aligned}
\mathbb{R}^N \setminus Q &= \Big(Q' \times (\mathbb{R}\setminus B_M)\Big) \cup \Big((\mathbb{R}^{N-1}\setminus Q') \times \mathbb{R}\Big) \\
&= \Big(Q' \times (\mathbb{R}\setminus B_M)\Big) \cup \Big(\mathbb{R}^N \setminus (Q' \times \mathbb{R})\Big).
\end{aligned}
$$

Setze $R := \{(x_1 + iy_1, x') \in {}^N \mid x' \in \mathbb{R}^{N-1}, |y_1| \leq A\omega(x_1, x') - B - 1\}$ und zeige: $|P(z)| > \epsilon > 0$ für jedes $z \in R$. Sei dazu z eine beliebige Nullstelle von P und $\tilde{z}$ in R. Dann gilt: $|z - \tilde{z}| \geq \max(|\operatorname{Im}(z - \tilde{z})|, |\operatorname{Re}(z - \tilde{z})|)$. Nach Voraussetzung gilt $|\operatorname{Im} z| \geq A\omega(\operatorname{Re} z) - B$ und

$|\operatorname{Im}\tilde{z}| \leq A\omega(\operatorname{Re}\tilde{z}) - B - 1$. Da ω gleichmäßig stetig ist, gibt es ein $\delta > 0$ so, daß für alle $\tilde{x}, x \in \mathbb{R}^N$ mit $|x - \tilde{x}| \leq \delta$ $|\omega(x) - \omega(\tilde{x})| \leq \frac{1}{2}$ gilt. Daher gilt $0 < \min(\delta, \frac{1}{2} \leq d := \operatorname{dist}(R, \{z \mid P(z) = 0\}$. Wenn P als Polynom in z_1 faktorisiert wird, folgt für jedes $z = (z_1, z') \in R$:

$$|P(z_1, z')| = |a| \prod_{k=1}^{m} |z_1 - z_0(z')^{(k)}| \geq |a| d^m > 0,$$

wobei die $z_0(z')^{(k)}$ die Nullstellen in z_1 von $P(z_1, z')$ sind. Daher gibt es eine offene Menge $R \subset \tilde{R} \subseteq {}^N$ so, daß für jedes $z \in \overline{\tilde{R}}$ gilt:

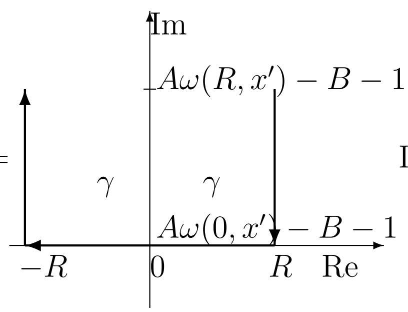
$$|P(z)| \geq \epsilon > 0.$$

Daher ist F auf $\tilde{R}$ holomorph. Sei nun $x' \in \mathbb{R}^{N-1} \setminus Q'$ fixiert. Zeige:

$$\int_{\mathbb{R}} F(x_1, x')\, dx_1 = \int_{\gamma} F(z, x')\, dz \tag{1-13}$$

mit

$$\gamma(x_1) = x + i(A\omega(x_1, x') - B - 1). \tag{1-14}$$

Sei Γ_R = 

Da F in $\tilde{R}$ holomorph ist, und Γ_R im Inneren von $\tilde{R}$ verläuft, gilt nach dem Cauchyschen Integralsatz für alle $R > 0$:

$$\int_{\Gamma_R} F(z_1, x')\, dz_1 = 0.$$

Da $x' \notin Q'$ ist, gilt $|x'|_\infty > M$. Daher ist $\operatorname{Bild}\gamma \cap Q = \emptyset$. Aus der Wahl von M folgt daher $\operatorname{Im}\gamma \geq 1$. Da $\varphi_2 \in \mathcal{D}_{(\omega)}(x \mid x_1 > \delta)$ ist, gilt mit „Paley-Wiener“ für $z \in R$:

$$\begin{aligned} |\hat{\varphi}_2(-z + t)| &\leq Ce^{H(-\operatorname{Im} z) - K\lambda\omega(t - \operatorname{Re} z)} \\ &\leq Ce^{-\delta \operatorname{Im} z_1 - K\lambda\omega(t - \operatorname{Re} z)}. \end{aligned} \tag{1-15}$$

Da $H(y) = \sup_{t \in \operatorname{supp}\varphi_2} \langle y, t \rangle \geq \delta y_1$ ist. Für $(z_1, x') \in R$ folgt daher:

$$|F(z_1, x')| \leq \frac{1}{\epsilon} Ce^{K\lambda\omega(t)} e^{-\lambda\omega(\operatorname{Re} z, x') - \delta \operatorname{Im} z_1}.$$

Daher gilt

$$\int_0^{A\omega(x_1, x') - B - 1} |F(x_1 + iy_1, x')|\, dy_1 \leq (A\omega(x_1, x') - B - 1) Ce^{K\lambda\omega(t) - \lambda\omega(x_1, x')} \to 0 \text{ für } |x_1| \to \infty.$$

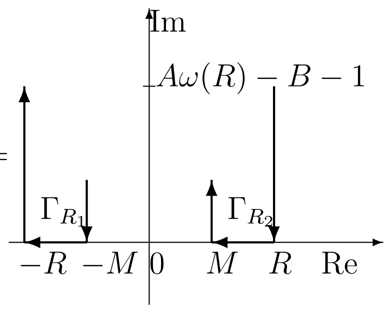
Mit $x_1 = \pm R$ folgt daher (1-13). Aus (1-14) und (1-15) folgt dann:

$$\begin{aligned}
|\int_\gamma F(z_1)\,dz_1| &\le \int_{\mathbb{R}} |F(\gamma(x_1),x')\gamma'(x_1)|\,dx_1 \\
&\le AV \int_{\mathbb{R}} |F(x_1 + i(A\omega(x_1,x') - B - 1), x')|\,dx_1 \\
&\le \frac{AV}{\epsilon} \int_{\mathbb{R}} |\hat{\varphi}_2(t - (x_1 + i(A\omega(x_1,x') - B - 1), x'))|\,dx_1 \\
&\le C \int_{\mathbb{R}} e^{-K\lambda\omega(t-(x_1,x')) - \delta(A\omega(x_1,x') - B - 1)}\,dx_1 \\
&\le Ce^{-\lambda\omega(t) + \delta(B+1)} \int_{\mathbb{R}} e^{(K\lambda - \delta A)\omega(x_1,x')}\,dx_1 \\
&\le Ce^{-\lambda\omega(t)} \int_{\mathbb{R}} e^{\lambda - A\delta\omega(x_1,x')}\,dx_1.
\end{aligned}$$

Wegen (1-12) und (1-13) folgt:

$$|f_{\mathbb{R}^N \setminus Q'}|(t) \le Ce^{-\lambda\omega(t)} \int_{\mathbb{R}^N} e^{\lambda - A\delta\omega(x)}\,dx \overset{(1\text{-}10)}{<} \infty.$$

Nun betrachte $f_{Q'}$. Als Integrationsweg nimmt man nur den Teil von γ mit $|\operatorname{Re} z| \ge M$, d.h.

$\Gamma_{R_{1,2}} =$ 

Zusätzlich zu den obigen Abschätzungen braucht man dann noch Abschätzungen für

$$I := \int_{Q'} \int_0^{A\omega(M,x') - B - 1} F(\pm M + iy, x')\,dy\,dx'$$

Da der Integrationsbereich kompakt und von R unabhängig ist, ist kann man I mit „Paley-Wiener" abschätzen und erhält:

$$|I| \le m_{N-1}(Q')(A\omega(2M) - B - 1)\frac{1}{|a|}Ce^{-\lambda\omega(t)} =: Ce^{-\lambda\omega(t)}.$$

und damit insgesamt:

$$\begin{aligned}
|f_{Q'}| &\le |I| + Ce^{-\lambda\omega(t)} \int_{\mathbb{R}^N} e^{(\lambda - \delta A)\omega(x)}\,dx \\
&\le Ce^{-\lambda\omega(t)}.
\end{aligned}$$

Damit ist dann (1-11) bewiesen.

Für ungerades i spiegelt man γ an der reellen Achse und kann dann ähnlich abschätzen, da $\operatorname{supp} \varphi_{2i-1} \subseteq \{x \mid x_i < -\delta\}$ gilt. Alle anderen Fälle unterscheiden sich hiervon nur durch eine Permutation der Variablen. Damit ist dann (1-9) gezeigt.

„1.1.(2)⇒1.1.(3)": Seien Ω, u wie in 1.1.(2) sowie $U \quad \Omega$ offen. Es reicht dann $u \in \mathcal{E}_{(\omega_1)}(U)$ zu zeigen. Sei $\delta > 0$ so, daß $U + B_\delta \quad \Omega$ und wähle ein $\varphi \in \mathcal{D}_{(\omega)}(\Omega)$ mit $\varphi|_{\overline{U+B_\delta}} \equiv 1$ sowie ein

$\alpha \in \mathcal{D}_{(\omega)}(B_\delta)$ mit $\alpha|_{\overline{B}_{\delta/2}} \equiv 1$. Dann ist $\varphi u \in \mathcal{E}'_{(\omega)}$, und es gilt:

$$\varphi u = E * P(D)\, \varphi u.$$

Zerlege φu in $u_1 + u_2$ mit

$$u_1 = P(D)(1-\alpha)E * (\varphi u)$$

und

$$u_2 = \alpha E * P(D)(\varphi u)$$

Da nach Voraussetzung $(1-\alpha)E \in \mathcal{E}_{(\omega)}$ ist (da $\operatorname{supp}(1-\alpha) \cap \operatorname{sing}_\omega \operatorname{supp} E \subseteq \mathbb{R}^N \setminus B_{\frac{\delta}{2}} \cap \{0\} = \emptyset$), folgt aus Satz I.3.6, daß $P(D)(1-\alpha)E \in \mathcal{E}_{(\omega)}$ gilt. Nach Satz II.3.11 ist dann $u_1 \in \mathcal{E}_{(\omega)} \subseteq \mathcal{E}_{(\omega_1)}$.

Andererseits gilt $\varphi u|_{U+B_\delta} = u|_{U+B_\delta}$ und deswegen nach Voraussetzung:

$$P(D)(\varphi u) \in \mathcal{E}_{(\omega_1)}(U + B_\delta).$$

Wegen $\alpha E \in \mathcal{E}'_{(\omega_1)}(B_\delta)$ folgt aus Satz II.3.11:

$$u_2 \in \mathcal{E}_{(\omega_1)}(U)$$

und damit $u \in \mathcal{E}_{(\omega_1)}(U)$.

„1.1.(3)$\Rightarrow$1.1.(4)“: trivial

„1.1.(4)$\Rightarrow$1.1.(1)“: Sei Ω wie in 1.1.(4) und $S \quad \Omega$ eine offene Kugel. Setze $H := H_S$ und fixiere ein beliebiges $\lambda > 0$. Definiere F wie in Lemma 1.4 mit der dort angegebenen Topologie. Sei $\psi \in \mathcal{D}_{(\omega)}(S)$ mit $\hat{\psi}(0) \neq 0$ beliebig. Betrachte nun die Abbildung:

$$\Delta : F \to \mathcal{D}_{(\omega_1)}(\overline{S}) : \mu \mapsto \psi\mu.$$

Dann ist Δ offensichtlich linear und wohldefiniert, da

$$\mathrm{B}^{\omega_2,loc}_{1,\exp(-\lambda\omega_2)} \subseteq \mathcal{D}'_{(\omega_2)} \overset{1.1.(4)}{\Rightarrow} \mu \in \mathcal{E}_{(\omega_1)}.$$

Zeige die Stetigkeit von Δ mit dem „Satz vom abgeschlossenen Graphen“: Sei u_n eine F-Nullfolge mit $\psi u_n \to v$ in $\mathcal{D}_{\omega_1}$. Für die Halbnorm $p : F \to \mathbb{R} : u \mapsto \|\psi u\|_{1,\exp(-\lambda\omega_2)}$ erhält man:

$$p(u_n) = \int_{\mathbb{R}^N} |\widehat{\psi u_n}| e^{-\lambda\omega_2}\, dx \to 0.$$

Wegen $\widehat{\psi u_n} \to \hat{v}$ in $\mathcal{S}_{\omega_1} \supseteq \widehat{\mathcal{D}}_{(\omega_1)}$ gilt $\hat{v} = 0$ und damit $v = 0$.

Aus der Stetigkeit von Δ und der Äquivalenz der Halbnormensysteme

$$(|\!|\!|.|\!|\!|_\lambda)_{\lambda>0} \quad \text{und} \quad (\|.\|_\lambda^{(\omega_1)})_{\lambda>0}$$

mit

$$|\!|\!|.|\!|\!|_\lambda := \sup_{z \in \ ^N} |\hat{.}(z)| e^{\lambda\omega_1(\operatorname{Re} z) - H(\operatorname{Im} z)}$$

(Korollar I.3.5) folgt die Existenz von $C > 0$ und $\varphi = \varphi_\lambda$ mit:

$$\forall u \in F \ : \ |\!|\!|\psi u|\!|\!|_\lambda \leq C \|\varphi u\|_{1,\exp(-\lambda\omega_2)} \tag{1-16}$$

Sei $z_0 \in {}^N$ mit $P(z_0) = 0$ beliebig gegeben. Setze $u(x) := e^{i\langle x, z_0\rangle}$. Es gilt für jedes $\phi \in \mathcal{D}_{(\omega)}$: $\widehat{\phi u} = \hat{\phi}(x - z_0)$ ($\Rightarrow u \in F$). Wende nun (1-16) auf u an:

$$\begin{aligned}
&|\hat{\psi}|(0)e^{\lambda\omega_1(\operatorname{Re} z_0) - H(\operatorname{Im} z_0)} \\
&\quad = \quad |\hat{\psi}|(z_0 - z_0)e^{\lambda\omega_1(\operatorname{Re} z_0) - H(\operatorname{Im} z_0)} \\
&\quad = \quad |\widehat{\psi u}|(z_0)e^{\lambda\omega_1(\operatorname{Re} z_0) - H(\operatorname{Im} z_0)} \\
&\quad \leq \quad \sup_{z \in {}^N} |\widehat{\psi u}|(z_0)e^{\tilde{\lambda}\omega_1(\operatorname{Re} z_0) - H(\operatorname{Im} z_0)} \\
&\quad = \quad \|\!|\psi u|\!\|_\lambda \\
&\quad \leq \quad C \int_{\mathbb{R}^N} |\hat{\varphi}|(x - z_0)e^{-\frac{\lambda}{K}\omega_2(x)}\, dx \\
&\quad \leq \quad Ce^{-\lambda\omega_2(\operatorname{Re} z_0)} \int_{\mathbb{R}^N} |\hat{\varphi}|(x - z_0)e^{\lambda\omega_2(x - \operatorname{Re} z_0)}\, dx \\
&\quad \overset{\text{Paley-Wiener}}{\leq} \quad C_\lambda e^{H_{\operatorname{supp}\varphi}(\operatorname{Im} z_0) - \frac{\lambda}{K}\omega_2(\operatorname{Re} z_0)}
\end{aligned} \tag{1-17}$$

Mit $H(\eta) + H_{\operatorname{supp}\varphi}(\eta) \leq D|\eta|$ folgt aus (1-17)

$$\begin{aligned}
D|\operatorname{Im} z_0| &\geq \lambda(\omega_1(\operatorname{Re} z_0) + \frac{\omega_2(\operatorname{Re} z_0)}{K}) - \log(\frac{C_\lambda}{|\hat{\psi}(0)|}) \\
&\geq \frac{\lambda}{K}\omega(\operatorname{Re} z_0) - \log(\frac{C_\lambda}{|\hat{\psi}(0)|}
\end{aligned}$$

Da D und C_λ nicht von z_0 abhängen und λ beliebig war, folgt damit 1.1.(1)

2. klassische Hypoelliptizität

Nachdem im letzten Abschnitt die ω-Hypoelliptizität charakterisiert wurde, wird hier nun dargestellt, wie der Zusammenhang zwischen der „klassischen" Hypoelliptizität, der Elliptizität und den Gevery-Klassen ist. Hierfür werden im wesentlichen Ergebnisse von Hörmander [**H2**] und die Definition von $\mathcal{E}_{(\omega)}$ über das Wachstum der Ableitungen benutzt.

Definition 2.1. *Ein Polynom P heißt* hypoelliptisch*, wenn für jede offene Menge $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ und jedes $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$ mit $P(D)\,u = 0$ bereits $u \in C^\infty$ folgt.*

Ein homogenes Polynom P heißt elliptisch*, wenn 0 die einzige reelle Nullstelle von P ist. Ein beliebiges Polynom heißt elliptisch, wenn sein Hauptteil (der homogene Anteil von P mit dem höchsten Grad) elliptisch ist.*

Aus Satz 8.6.1 [**H2**] folgt, daß jede Nullösung eines elliptischen Differentialoperators reellanalytisch ist. Da jede analytische Funktion in $\mathcal{E}_{(\omega)}$ für jedes $\omega \in \mathcal{M}'$ ist, ist jedes elliptische Polynom ω-hypoelliptisch für jedes $\omega \in \mathcal{M}'$. Da $C^\infty = \mathcal{E}_{(\log(1+.))}$ ist, ist jeder ω-hypoelliptische Operator hypoelliptisch, und man erhält Hypoelliptizität als $\log(1+.)$-Hypoelliptizität.

Lemma 2.2. Sei $0 < \alpha < 1$ und $\omega(t) := t^\alpha$. Dann gilt:

$$\varphi^*_\omega(y) = \frac{1}{\alpha}y\log y - \frac{\log\alpha}{\alpha}y - \frac{y}{\alpha}.$$

Beweis. Es gilt $\varphi_\omega^*(y) = \sup_{x\geq 0} xy - e^{\alpha x} = x_0 - e^{\alpha x_0}$. Durch eine Kurvendiskussion erhält man: $x_0 = \frac{\log \frac{y}{\alpha}}{\alpha}$. Damit folgt dann die Behauptung.

Lemma 2.3. Sei ω wie oben. Für jedes $u \in \mathcal{E}_{(\omega)}$, $x, y \in \mathbb{R}^N$ gibt es $C > 0$ so, daß für jedes $j \in \mathbb{N}$:

$$|\langle y, D\rangle^j u|(x) \leq C\left(|y|Ne^{-N\frac{\log\alpha}{\alpha}-\frac{N}{\alpha}}\right)^j j^{\frac{N}{\alpha}j} =: C_1 C_2^j M_j.$$

Beweis. Nach Definition I.3.8 gibt es ein $C > 0$ so, daß für jedes $\beta \in \mathbb{N}_0^N$

$$|u^{(\beta)}|(x) \leq Ce^{\varphi_\omega^*(|\beta|)}$$

gilt. Nach Lemma 2.3 gilt:

$$\begin{aligned} e^{N\varphi_\omega^*(j)} &= e^{\frac{1}{\alpha}j\log j - \frac{\log\alpha}{\alpha}j - \frac{j}{\alpha}} \\ &= \left(e^{-\frac{N\log\alpha}{\alpha}-\frac{N}{\alpha}}\right)^j j^{\frac{N}{\alpha}j} \end{aligned}$$

Zusammen erhält man daher:

$$\begin{aligned} |\langle y, D\rangle^j u|(x) &= |\left(\sum_{l=1}^N y_l D_l\right)^j u|(x) \leq \sum_{|\beta|=j}\binom{j}{\beta}\prod_{l=1}^N |y_l^{\beta_l}|\,|D_l^{\beta_l}u|(x) \leq |y|^j \sum_{|\beta|=j}\binom{j}{\beta}\prod_{l=1}^N |D_l^{\beta_l}u|(x) \\ &\leq |y|^j\sum_{|\beta|=j}\binom{j}{\beta}\prod_{l=1}^N Ce^{\varphi_\omega^*(\beta_l)} \leq |y|^j\sum_{|\beta|=j}\binom{j}{\beta}\prod_{l=1}^N Ce^{\varphi_\omega^*(|\beta|)} \leq |y|^j C^N e^{N\varphi_\omega^*(j)}\sum_{|\beta|=j}\binom{j}{\beta} \\ &= C^N(|y|N)^j e^{N\varphi_\omega^*(j)} = C^N(|y|Ne^{-\frac{N\log\alpha}{\alpha}-\frac{N}{\alpha}})^j j^{\frac{N}{\alpha}j} \end{aligned}$$

Satz 2.4. *Sei $\omega \in \mathcal{M}'$ beliebig gegeben. Wenn $\omega \succ t^\alpha$ für jedes $0 < \alpha < 1$ gilt, so ist P ω-hypoellitpisch genau dann, wenn P elliptisch ist.*

Beweis. Es reicht zu zeigen, daß P elliptisch ist, falls P ω-hypoelliptisch ist. Sei dazu $u \in \mathcal{D}'$ mit $P(D)\,u = 0$ gegeben. Nach Annahme und 1.1.(4) folgt $u \in \Gamma^{(1/\alpha)}$ für jedes $0 < \alpha < 1$. Wegen Lemma 2.3 gibt es nach [**H2**] 11.4.7 zu jedem $y \in \mathbb{R}^N$ und jedem $0 < \alpha < 1$ Konstanten σ, C und $c > 0$ so, daß für jedes $k \in \mathbb{N}$ und jedes $z \in {}^N$ mit $P(z) = 0$

$$k^{1/\alpha} \geq ck\sigma \tag{2-1}$$

und

$$|\langle y, z\rangle| \leq C(1 + |\operatorname{Re} z|)^\sigma \tag{2-2}$$

gilt. Wegen (2-1) folgt $\sigma \leq \frac{1}{\alpha}$, (2-2) impliziert $1 \leq \sigma$. Für $\alpha \to 1$ erhält man daher $\sigma = 1$. Mit 11.4.9 [**H2**] und 11.4.8 [**H2**] folgt dann $\rho(y) = 1$ für jedes y und daher mit Satz 11.4.12 [**H2**] die Analytizität von u, da $\Gamma^{(1)} = A({}^N)$ gilt.

Da aus Satz 11.4.2 [**H2**] folgt, daß jedes hypoelliptische Polynom P schon t^α-hypolelliptisch ist, gibt es für ein Polynom drei Möglichkeiten:

(1) P ist elliptisch
(2) Es gibt ein $0 < \alpha < 1$ so, daß P t^α-hypoelliptisch ist
(3) Es gibt ein $u \in \mathcal{D}'$ mit $P(D)\,u = 0$ und $\operatorname{sing}_\omega \operatorname{supp} u \neq \emptyset$.

Symbolverzeichnis

Liste der in dieser Arbeit vorkommenden Räume von Distributionen und Funktionen:

Literaturverzeichnis

[Be] A. Beurling.*Quasianalyticity and general distributions*. Lectures 4 and 5, American Mathematical Society Summer Institute (Stanford, 1961).

[Bj] Göran Björck.*Linear partial differential operators and generalized distributions*. Arkiv för Mathematik, Band 6 (1965), Seite 351-407

[BMT] R.W. Braun, R. Meise, B.A. Taylor.*Ultradifferential functions and Fourier analysis*. Result. Math. 17 (1990), Seite 206-237

[Bo] N. Bourbaki. *Topological Vector Spaces*.

[CZ] I. Ciorănescu, L. Zsidó.*ω-ultradistributions and their applications to operator theory*.In „Spectral Theory“, Banach Center Publications 8. Warsaw 1982, Seite 77-220.

[F] Uwe Franken.*Kerne von Faltungsoperatoren auf Räumen von Ultradistributionen*. Diplomarbeit, Düsseldorf 1988

[H1] Lars Hörmander.*Linear Partial Differential Operators*. Springer 1969

[H2] Lars Hörmander.*The Analysis of Linear Partial Differential Operators*. Springer 1990. Band 1 und 2.

[Ko] H. Komatsu.*Ultradistributions I. Structure theorems ans a characterisation*. J. Fac. Sci. Tokyo Sec. IA 20 (1973), Seite 25- 105.

[Ma] Krzystof Maurin. *Analysis, Part II*. D. Reidel Publishing Company 1980

[MV] R. Meise, D.Vogt.*Einführung in die Funktionalanalysis*. Vieweg 1992

Ich erkläre hiermit, daß ich diese Diplomarbeit selbständig verfaßt und keine anderen als die angegebenen Quellen und Hilfsmittel benutzt habe.
Hilden, 19. Juli 1995